

Séries entières

6.1 Séries entières

Un cas fondamental de séries de fonctions est donné par les fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes ; comme tout nombre réel peut être vu comme un nombre complexe, on va dans un premier temps se concentrer sur le cas où $a_n \in \mathbb{C}$.

★ Théorème 6.1

Soit $R = \sup\{r \geq 0 : a_n r^n \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty]$. Alors on a :

1. Pour tout $r \in [0, R[$ la série $\sum a_n r^n$ est convergente.
2. Pour tout $r > R$ la série $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0).

On appelle R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Démonstration. Notons que si $r \geq 0$ est tel que $a_n r^n$ est bornée, et $0 \leq r_1 \leq r$, alors $a_n r_1^n$ est bornée aussi. En particulier, $a_n r^n$ est bornée pour tout $r < R$.

Soit $r < R$; on choisit ρ tel que $r < \rho < R$. En particulier $\rho \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$a_n r^n = (a_n \rho^n) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Puisque $0 \leq \rho < R$, on a que $a_n \rho^n$ est bornée ; et la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ est convergente puisque $0 \leq \frac{r}{\rho} < 1$. Donc $\sum a_n r^n$ est convergente, comme annoncé.

Supposons que $r > R$; alors par définition d'un sup $a_n r^n$ n'est pas bornée, en particulier ne tend pas vers 0 et la série $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement. $\square$

🔪 Exercice 6.2

Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est également donné par la formule

$$R = \sup\{r \geq 0 : a_n r^n \text{ tend vers } 0\}$$

(attention, on ne prétend pas ici que $a_n r^n$ est bornée ssi elle tend vers 0 ! L'exemple où $a_n = 1$ pour tout n est instructif)

On peut établir divers critères pour calculer le rayon de convergence : règle de d'Alembert en considérant $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (attention aux divisions par 0...), ou la plus sophistiquée règle de Hadamard (qui fait intervenir une $\limsup$). Dans les deux cas, il s'agit de comparer $\sum a_n z^n$ à une série géométrique ; en pratique, revenir à la définition (et aux comparaisons avec des séries géométriques) permet de calculer le rayon.

★ Théorème 6.3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est égal à $R \in [0, +\infty]$.

Alors cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ (et définit donc une fonction continue sur cet ensemble).

En effet, pour tout $r < R$, la série de fonctions converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, donc uniformément.

Étant donnée une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on peut considérer sa *série dérivée*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

★ Théorème 6.4

Le rayon de convergence de la série dérivée est égal au rayon de convergence de la série.

Démonstration. Si $r \geq 0$ est tel que $a_n r^n$ n'est pas borné alors $(n+1)a_{n+1}r^n$ n'est pas borné non plus. Si on note R' le rayon de convergence de la série dérivée, on vient de montrer que $r > R$ implique $r > R'$, autrement dit $R' \leq R$.

Réciproquement, supposons que $r < R$ et considérons de nouveau ρ tel que $r < \rho < R$. Alors $n a_n r^n = (a_n \rho^n) \left(n \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \right)$ est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0, et tend donc vers 0. On en conclut que $r < R'$, donc que $R \leq R'$ et finalement que $R' = R$.

□

Restreignons-nous brièvement au cas où la variable est réelle. On voit (en utilisant les théorèmes concernant la convergence uniforme sur les compacts vus lors de la séance sur les séries de fonctions) que si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R alors elle définit une fonction dérivable sur $] -R, R[$, et la dérivée de cette fonction est égale à la somme de la série dérivée. On peut ensuite appliquer le même raisonnement à la série dérivée : on conclut que, sur $] -R, R[$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme les polynômes $a_n z^n$.

En particulier, on a unicité du développement en série entière : on a la formule $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

On en déduit l'égalité suivante, valable pour tout $x \in] -R, R[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Toute ressemblance avec un développement de Taylor n'est pas purement fortuite (et cette série est la *série de Taylor* associée à f au voisinage de 0). On voit aussi que pouvoir se développer en série entière au voisinage d'un point donné est une propriété très forte, plus forte même qu'être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

 Exercice 6.5

Donner les détails de cette démonstration : démontrer que si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence R alors la somme de cette série définit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et donner une formule pour $f^{(k)}$ en terme de somme d'une série entière sur $] -R, R[$.

 Exercice 6.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Indication. On pourra commencer par montrer que, sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n , et que $f^{(n)}$ s'écrit sous la forme $x \mapsto F(x)e^{-1/x^2}$, où F est une fraction rationnelle dont le seul pôle est en 0.

Cette possibilité de dériver terme à terme peut être utile pour calculer des sommes de séries entières, en montrant que leur somme satisfait une équation différentielle et en résolvant celle-ci ; ou pour résoudre des équations différentielles, en recherchant une solution développable en série entière et en identifiant les coefficients de son développement.

Sur $\mathbb{C}$, parler de dérivée est hors-programme à l'interne (mais la notion de fonction holomorphe est au programme de l'externe et intervient régulièrement dans les sujets d'écrit). Cela dit, le résultat suivant est au programme de l'interne ; je ne le mentionne ici que par acquit de conscience, tant il me semble que ce résultat est rarement utilisé dans le cadre de l'agrégation interne.

 Théorème 6.7

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et z_0 tel que $|z_0| < R$. Pour z tel que $|z| < R$ on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On a alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

Autrement dit, la série dérivée permet de calculer la valeur du taux d'accroissement (au sens complexe) de la fonction définie par la série entière.

Démonstration. Avec un petit peu de calcul différentiel (en particulier, l'inégalité des accroissements finis) on pourrait utiliser la convergence uniforme de la série dérivée sur les compacts pour conclure, comme on peut le faire sur $\mathbb{R}$ (et obtenir que f , vue comme fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, est différentiable, sa différentielle étant une similitude directe). L'argument qu'on présente ci-dessous est plus explicite, et aussi un peu plus calculatoire, mais instructif (il n'est pour autant pas déraisonnable de sauter cette preuve lors d'une première lecture de ces notes).

On fixe z_0 et r tels que $|z_0| < r < R$, et h tel que $|z_0| + |h| < r$; en particulier $|z_0 + h| < r$. Notons $\ell = \sum_{n \geq 1} n a_n z_0^{n-1}$ (on sait que cette série converge ; pourquoi ?)

On considère $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \ell$, quantité dont on voudrait montrer qu'elle tend vers 0 quand h tend vers 0 ; elle est égale à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} - na_n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(z_0, h)$$

On peut écrire (en utilisant la factorisation de $X^n - Y^n$ par $X - Y$)

$$\frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = (z_0 + h)^{n-1} + z_0(z_0 + h)^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}$$

En majorant $|z_0|$ et $|z_0 + h|$ par r , on obtient :

$$|b_n(z_0, h)| \leq |a_n|(r^{n-1} + rr^{n-2} + \dots + r^{n-1} + nr^{n-1}) = 2na_n r^{n-1}$$

On n'est pas tout à fait au bout de nos peines, mais un découpage de somme va nous tirer d'affaire.

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |na_n r^{n-1}|$ converge, on peut trouver N tel que $\sum_{n=N}^{+\infty} |2na_n r^{n-1}| \leq \varepsilon$. En reprenant notre égalité du début, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} - na_n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} b_n(z_0, h) + \sum_{n=N}^{+\infty} b_n(z_0, h)$$

Il suit de nos calculs précédents que la somme de N à $+\infty$ est très petite (indépendamment de h , du moment que $|z_0 + h| < r$). Et la somme de 1 à $N - 1$ est un polynôme en h , qui vaut 0 en 0 : il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|h| \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N-1} b_n(z_0, h) \right| \leq \varepsilon$$

On en conclut que pour tout h tel que $|h| \leq \delta$ on a $\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \ell \right| \leq 2\varepsilon$, et nous voilà tirées d'affaire. $\square$

Mentionnons un dernier point avant de passer aux exercices : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R , avec $0 < R < +\infty$. Alors, sur le disque ouvert centré en 0 et de rayon R , on a convergence uniforme sur les compacts, et beaucoup de propriétés fortes (discutées ci-dessus), en particulier la possibilité de dériver terme à terme.

Hors du disque fermé de centre 0 et de rayon R , point de salut : la série ne converge nulle part.

Mais au bord du disque (c'est-à-dire sur le cercle de centre 0 et de rayon R), essentiellement tous les comportements sont possibles : la série peut y diverger partout, y converger partout sans que la limite y soit continue, y converger partout avec une limite continue, ou y converger sur un sous-ensemble non-trivial du cercle, par exemple en dehors d'un ensemble fini (à ma connaissance, le problème de déterminer pour quels sous-ensembles F du cercle unité il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1, qui converge pour tout $z \in F$ et diverge pour tout $z \notin F$ n'est toujours pas complètement résolu). L'étude au bord est donc subtile et les passages à la limite correspondants doivent être traités avec prudence ; c'est par exemple à cela que sert le lemme d'Abel.

6.2 Exercices

Exercice 6.8

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum a_n z^n$ où a_n est la n -ième décimale de $1/\sqrt{2}$;
2. $\sum \operatorname{ch}(n) z^{3n}$;
3. $\sum F(n) z^n$ où F est une fraction rationnelle non nulle;
4. $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$.

Exercice 6.9

1. Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ converge partout sur le cercle de convergence sauf en un point.
2. Donner un exemple de série entière de rayon 1 qui converge en tout point du cercle de convergence sauf en $e^{i\pi/4}$.
3. Donner un exemple de série entière de rayon 1 qui converge en tout point du cercle de convergence sauf en quatre points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et $e^{i\delta}$, où α , β , γ , δ sont des réels donnés.

Exercice 6.10

Ici je reprends l'énoncé de l'exercice 38 d'Analystan sur le théorème d'Abel. On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, et on suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1. On note f la somme de cette série, définie pour tout z de module < 1 . On suppose de plus que $\sum a_n$ est convergente; on souhaite établir que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

1. Établir le résultat dans le cas particulier où chaque a_n est un réel positif.
2. Étudier le cas particulier où $a_n = (-1)^n b_n$, avec $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs convergeant vers 0.
3. On souhaite maintenant établir le résultat dans le cas général; pour cela, on pourra poser

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \text{ puis montrer que pour tous entiers } n \text{ et } p \text{ avec } p \geq n+2 \text{ on a}$$

$$\sum_{k=n+1}^p a_k r^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$$

(ceci devant vous permettre de vérifier le critère de Cauchy uniforme)

4. En déduire que f est continue sur $[0, 1]$.
5. Deux exemples.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

- b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On s'intéresse à leur produit de Cauchy, c'est-à-dire que pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$. On suppose que $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ sont toutes trois convergentes. Montrer qu'on a alors l'égalité

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Exercice 6.11

1. Calculer $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n^2 z^{2n-1}$ pour z complexe convenable et $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n + 1} x^n$ pour x réel convenable.
2. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n + 1}$ pour $x \in]-1, 1]$.
3. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + 1}{n!} z^n$ pour z complexe.
4. Calculer $\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) z^n$ pour θ réel et z complexe convenable.
5. Calculer

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n + 1)(2n + 1)}$$

Exercice 6.12

Calculer le développement en série entière en zéro de $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$. On pourra commencer par déterminer une équation différentielle dont f' est solution.

6.2.1 Quelques exercices d'application

Cf. entre autres *Analystan* :

- calcul d'intégrales ;
- applications combinatoires : nombres de Bell ; nombres et polynômes de Bernoulli, dérangements, involutions, parenthésages (nombres de Catalan) ;
- fonctions spéciales : exponentielle ! fonctions trigonométriques, logarithme ; plus sophistiqué : fonctions de Bessel ;
- holomorphie (pour l'externe) ;
- etc.

 Exercice 6.13

Pour $t > 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \arctan t^{-1}$. Faire un DSE et permuter somme et intégrale.

 Exercice 6.14

Exprimer $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$ comme somme d'une série.

 Exercice 6.15

Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = +\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

 Exercice 6.16

[Skandalis, ex. 6.12]

Pour n entier naturel non nul, on note a_n le nombre de parenthésages sur n lettres, c'est-à-dire l'ordre dans lequel effectuer les opérations en calculant le produit de $x_1, \dots, x_n$ (si on faisait un produit pour une opération non associative, cet ordre pourrait avoir une influence sur le résultat du calcul!). Par exemple, il y a deux parenthésages possibles sur trois lettres x, y et z , à savoir $(xy)z$ et $x(yz)$. Par convention, $a_1 = a_2 = 1$.

1. Calculer a_4 . Démontrer que pour $n \geq 2$, on a : $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
2. Considérons la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que son rayon de convergence R n'est pas nul. Soit f sa somme. Montrer que pour $x \in]-R, R[$, on a : $f(x)^2 - f(x) + x = 0$.
3. Résoudre cette équation, développer la solution en série entière et en déduire une formule qui donne a_n en fonction de n . (On justifiera en particulier l'hypothèse de 2.)

(Pour la culture : [l'associaèdre de Stasheff](#).)

 Exercice 6.17

[Francinou-Gianella ou analogue]

Un dérangement est une permutation sans point fixe, c'est-à-dire dont la décomposition en cycles disjoints ne comporte que des cycles de longueur ≥ 2 . On note d_n le nombre de dérangements dans le groupe symétrique sur n lettres.

1. Montrer que pour tout n on a : $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.
Considérer la décomposition d'un dérangement en cycles : si $n+1$ apparaît dans un cycle de

longueur 2, on a n façons de choisir son image et d_{n-1} façons de déranger les $n - 1$ autres lettres ; sinon, on a n façons de choisir son image et on obtient un dérangement de n lettres en effaçant $n + 1$.

2. On pose $b_n = \frac{d_n}{n!}$. Minorer le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ et montrer que sa somme $g(x)$ est solution de : $(1 - x)y' - xy = 0$. En déduire une expression de $g(x)$.