
Séries de Fourier

7.1 Série de Fourier et projections orthogonales

On note E l'espace de toutes les fonctions continues, 2π -périodiques, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Sur cet espace, on considère deux normes :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}$$

Muni de $\|\cdot\|_\infty$, E est un espace vectoriel normé complet. En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme, et converge donc uniformément vers une fonction continue.

Muni de $\|\cdot\|_2$, E est un espace préhilbertien, le produit scalaire associé étant donné par la formule

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Comme souvent, on cherche à approcher une fonction $f \in E$ par une suite de fonctions plus simples ; par exemple, on sait qu'on peut approcher f uniformément sur $[-\pi, \pi]$ par une suite de polynômes. Dans la suite, on va utiliser le fait qu'on peut approcher uniformément toute fonction continue, 2π -périodique par une suite de *polynômes trigonométriques*, c'est-à-dire des fonctions appartenant à l'espace vectoriel engendré par les fonctions $e_n : x \mapsto e^{inx}$, où $n \in \mathbb{Z}$. C'est par exemple une conséquence du théorème de Fejér qui est démontré plus tard dans ces notes (sans utiliser de boîte noire) ; pour l'instant on admet ce résultat.

Un point important à noter est que, si $n \neq m$, on a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Par ailleurs, on a pour tout n l'égalité $\|e_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 dt = 1$. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc une famille orthonormale dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Si on fixe $N \in \mathbb{N}$, l'espace $E_N = \text{Vect}(\{e_i : -N \leq i \leq N\})$ est un sous-espace de dimension finie de E ; notons S_N la projection orthogonale sur E_N . On a alors la formule suivante, valable pour tout $f \in E$:

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n$$

Définition 7.1

Notons $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. On appelle $c_n(f)$ le n -ième coefficient de Fourier de f , et S_N est la somme partielle d'indice N de la *série de Fourier* de f .

Récapitulons : considérer la série de Fourier de f , cela revient à projeter f orthogonalement sur l'espace engendré par les polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, puis à faire tendre N vers $+\infty$. Les questions naturelles sont maintenant : est-ce que $S_N(f)$ tend vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$ quand N tend vers $+\infty$? Et dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

Notons T l'espace des polynômes trigonométriques. Si $S_N(f)$ converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$, alors f appartient à l'adhérence de T dans $(E, \|\cdot\|_2)$; réciproquement, supposons qu'il existe une suite (p_n) de polynômes trigonométriques qui converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$. Si les (p_n) sont de degrés bornés, disons majorés par $N \in \mathbb{N}$, alors $f \in \overline{E_N} = E_N$ (parce que E_N est de dimension finie, donc fermé) et f est un polynôme trigonométrique. Quitte à extraire, on peut donc supposer que $d_n = \deg(p_n) \rightarrow +\infty$. Mais, par définition d'un projeté orthogonal, $S_{d_n}(f)$ est l'élément de E_{d_n} le plus proche de f ; par conséquent, on a $\|f - S_{d_n}(f)\|_2 \leq \|f - p_n\|_2 \rightarrow 0$.

La suite $\|f - S_N(f)\|_2$ est décroissante (parce que $E_N \subset E_{N+1}$) et on conclut que $\|f - S_N(f)\|_2$ tend vers 0.

En résumé : il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$ si, et seulement si, $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$.

De plus, si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f , alors on a aussi $\|p_n - f\|_2 \rightarrow 0$ (via un échange limite-intégrale avec convergence uniforme sur un segment). En particulier, le fait (admis pour le moment) que toute fonction continue soit une limite uniforme de polynômes trigonométriques implique que, pour toute fonction continue f , $\|S_N(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Il n'est par contre pas toujours vrai que $S_N(f)$ converge uniformément vers f quand f est continue ; on va voir plus bas que c'est le cas dès qu'on suppose f suffisamment régulière (continue et C^1 par morceaux, par exemple).

Commençons par analyser le cas de la convergence en moyenne quadratique, qui est le plus simple.

7.2 Lemme de Riemann-Lebesgue et convergence en moyenne quadratique

Pour que la série de Fourier ait une chance de converger, il faut déjà établir que ses coefficients $c_n(f)$ tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

★ Théorème 7.2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.

Alors $\int_a^b f(t) e^{-i\lambda t} dt$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$ (ici $\lambda \in \mathbb{R}$).

Donc $\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tendent vers 0 quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

7.2. LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE ET CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE³

Démonstration. Supposons tout d'abord f de classe $\mathcal{C}^1$. Alors une intégration par parties nous donne, pour $\lambda \neq 0$,

$$\int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt = \left[-\frac{f(t)e^{-i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b + \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(t)e^{-i\lambda t} dt$$

Le terme entre crochets tend vers 0 quand $|\lambda| \rightarrow +\infty$ (le module de $e^{-i\lambda t}$ vaut 1) et le second terme est majoré en module par $\frac{1}{|\lambda|} \int_a^b |f'(t)| dt$, qui tend aussi vers 0.

Si maintenant f est simplement supposée continue, on trouve une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ (par exemple, des polynômes) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors la suite de fonctions $t \mapsto f_n(t)e^{-i\lambda t}$ converge uniformément vers $t \mapsto f(t)e^{-i\lambda t}$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout λ , que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt - \int_a^b f_n(t)e^{-i\lambda t} dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - f_n(t))e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq |b - a| \|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, fixons n tel que $|b - a| \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Par le résultat qu'on a précédemment établi pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, il existe M tel que si $|\lambda| \geq M$ alors $\left| \int_a^b f_n(t)e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon$. Il

suit de cela et de l'inégalité triangulaire que $\left| \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt \right| \leq 2\varepsilon$ pour tout λ satisfaisant $|\lambda| \geq M$, et on a démontré le résultat attendu dans le cas d'une fonction continue sur $[a, b]$.

Le résultat pour les fonctions continues par morceaux s'en déduit en considérant $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ avec la propriété que f se prolonge en une fonction continue sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, en appliquant le résultat pour les fonctions continues sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ et en utilisant la relation de Chasles ainsi que le fait qu'une somme finie de fonctions tendant vers 0 est encore une fonction qui tend vers 0. $\square$

Si on suppose de plus que $f(\pi) = f(-\pi)$, i.e. que f se prolonge en une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, et que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors on obtient avec la même IPP (et en utilisant la relation de Chasles pour traiter d'éventuelles discontinuités de f') pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'égalité $c_n(f) = -\frac{i}{n} c_n(f')$, ou encore

$$\forall n \neq 0 \quad c_n(f') = inc_n(f)$$

Attention, cette formule n'est plus vraie en général si f n'est pas supposée continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Il suit facilement de ce résultat que si f est continue, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux alors sa série de Fourier converge normalement (nécessairement vers f) ⁽ⁱ⁾

(i). On se trouve amené à manipuler des séries indexées par $\mathbb{Z}$, et qu'il faut faire attention à ce qu'on entend par convergence normale dans ce cas-là ; voir les quelques commentaires en fin de ce document si nécessaire.

En effet, on a $|c_n(f)| = \frac{1}{n^2}|c_n(f'')|$ pour $n \neq 0$, et $|c_n(f'')|$ tend vers 0 en $+\infty$ puisque f'' est continue par morceaux. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Notons g sa limite; puisque $S_N(f)$ converge uniformément vers g on a aussi que $\|S_N(f) - g\|_2$ tend vers 0, donc $\|f - g\|_2 = 0$ puisqu'on a déjà vu que $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$. Comme f et g sont continues, on en conclut que $f = g$.

On verra bientôt que la convergence normale de la série de Fourier est assurée dès que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais d'abord il nous faudra justifier que la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Le résultat d'approximation en moyenne quadratique par la série de Fourier reste vrai pour les fonctions continues par morceaux.

★ Théorème 7.3

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et 2π -périodique. Alors :

1. Pour tout N on a $\|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - f\|_2^2$
2. $\|S_N(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Démonstration. Ces deux résultats ont déjà été vus pour les fonctions continues 2π -périodiques (en pensant à $f \mapsto S_N(f)$ comme une projection orthogonale et en utilisant que les polynômes trigonométriques sont denses dans $(E, \|\cdot\|_2)$) et le résultat plus général ci-dessus s'en déduirait immédiatement si on travaillait dans $L^2([0, \pi])$. Mais ces espaces ne sont pas au programme de l'interne; et $\|\cdot\|_2$ n'induit pas une norme sur l'espace des fonctions continues par morceaux (pourquoi?), d'où les circonlocutions des paragraphes suivants pour ne pas sortir du programme.

Remarquons que, si f est continue par morceaux, 2π -périodique, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues et 2π -périodiques qui converge simplement vers f , avec $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (en chaque discontinuité de f , on remplace f par une fonction affine sur un petit segment centré en cette discontinuité, par exemple).

Le théorème de convergence dominée nous permet d'obtenir que $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0 puis, à N fixé, que $\|S_N(f_n)\|_2^2 \rightarrow \|S_N(f)\|_2^2$, et que $\|S_N(f_n) - f_n\|_2^2 \rightarrow \|S_N(f) - f\|_2^2$. On en déduit en passant à la limite l'égalité apparaissant au premier item ci-dessus.

Il suit aussi de cette égalité que $\|S_N(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ pour tout N et toute fonction f continue par morceaux et 2π -périodique. Fixons une telle fonction f , et trouvons une suite (f_n) de fonctions continues et telles que $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. On a pour tout N et tout n :

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - f\|_2 &\leq \|S_N(f - f_n)\|_2 + \|S_N(f_n) - f_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \\ &\leq 2\|f_n - f\|_2 + \|S_N(f_n) - f_n\|_2 \end{aligned}$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_2 \leq \varepsilon$; puisque f_n est continue et 2π -périodique, il existe M tel que pour tout $N \geq M$ on ait $\|S_N(f_n) - f_n\|_2 \leq \varepsilon$.

On obtient alors $\|S_N(f) - f\|_2 \leq 3\varepsilon$ pour tout $N \geq M$, ce qui montre que $\|S_N(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

□

Du point de vue de la moyenne quadratique, tout est donc pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles dès lors que f est continue par morceaux (si on connaît l'espace $L^2([0, 2\pi])$, on a montré en réalité que tout se passait bien dans cet espace, parce que notre famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne et que les coefficients de Fourier correspondent aux coefficients de la décomposition sur cette base)

7.3 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval

Étant donnée f continue par morceaux et 2π -périodique, on a prouvé que $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$, et que $\|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$. On peut maintenant faire tendre N vers $+\infty$ et récolter les fruits de notre travail.

Comme les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormale dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a pour tout N l'égalité

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$$

De plus, par définition du produit scalaire sur E , on a $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$. Le théorème suivant est donc une conséquence immédiate des résultats de la section précédente.

★ Théorème 7.4

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et 2π -périodique. Alors on a

$$\begin{aligned} \text{(Inégalité de Bessel)} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \\ \text{(Égalité de Parseval)} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Si f est 2π -périodique, continue par morceaux et $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors il suit de l'égalité de Parseval que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 0$, donc f est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points (ses discontinuités) ; il suit que si f, g sont continues, 2π -périodiques et $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = g$. Ce cas particulier est souvent utile en pratique.

7.4 Convergence normale de la série de Fourier pour les fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de déduire simplement le résultat suivant.

★ Théorème 7.5

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement (et donc uniformément) vers f .

Démonstration.

Comme f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a pour tout $n \neq 0$ l'égalité $c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$, et puisque f' est continue par morceaux on sait grâce à l'égalité de Parseval que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2$ converge.

Mais alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous garantit que

$$\sum_{n \neq 0} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2}$$

Donc $\sum_{n \neq 0} |c_n(f)|$ converge, ce dont on déduit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ converge normalement puisque $|e_n(x)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $(S_N(f))_N$ converge uniformément vers une fonction continue g ; un nouvel échange série-intégrale (par convergence uniforme sur un segment) montre que $c_n(g) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc que $f = g$. $\square$

Remarquons que si $S_N(f)$ converge uniformément vers g , alors $c_n(g) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (toujours par échange limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment), et il suit de nos résultats précédents que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 = 0$. Par conséquent $f = g$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Donc, s'il n'existe pas de fonction continue g telle que $f = g$ sauf en un nombre fini de points, alors la série de Fourier de f ne peut pas converger uniformément; et la série de Fourier ne pourra converger uniformément vers f que si f est continue, bien sûr.

Il nous reste à comprendre le cas des fonctions continues; celui-ci est plus subtil, et « en général » la série de Fourier d'une fonction continue f , 2π -périodique, ne converge même pas simplement vers f . Néanmoins, elle converge uniformément vers f *en moyenne de Cesàro*, comme on le verra plus bas; avant de montrer cela, prouvons qu'on a convergence simple dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (qui peuvent avoir un nombre fini de discontinuités sur $[-\pi, \pi]$).

7.5 Le théorème de Dirichlet-Jordan

Fixons une fonction f 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a pour tout x :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-N}^N e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \end{aligned}$$

où le noyau de Dirichlet D_N est donné par la formule

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \sum_{k=-N}^N e^{iky} \\ &= \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})y\right)}{\sin(\frac{y}{2})} \end{aligned}$$

(J'ai volontairement sauté les étapes de calcul entre les deux lignes ci-dessus : c'est un bon exercice de savoir retrouver cette formule ! Quand y vaut 0 modulo 2π , la formule ci-dessus a un sens en prolongeant par continuité)

L'écriture sous forme de somme nous permet de voir que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) dy = 1$. On peut maintenant considérer, pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_N(u) du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N(u) du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\left((N + \frac{1}{2})t\right) dt \end{aligned}$$

Quelques commentaires : le passage de la première ligne à la deuxième se fait via le changement de variables affine $u = x - t$; et de la deuxième à la troisième on utilise le fait que, si f est T -périodique, alors $\int_a^{a+T} f(t) dt$ ne dépend pas de a .

Pour pouvoir faire quelque chose de l'intégrale obtenue à la dernière ligne, on est bien embêté sans hypothèse sur f ; par contre, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$, qui vaut $-f'(x)$ en 0 ; et le lemme de Riemann-Lebesgue nous permet de conclure que $S_N(f)(x) - f(x)$ tend vers 0. Mais ça, on le savait déjà !

En fait, on peut faire mieux que cela, avec la même idée : supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et notons $f(x^+)$ sa limite à droite en x , et $f(x^-)$ sa limite à gauche en x (qui existent pour tout x par définition d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Notons $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$

Alors on a, en utilisant un calcul similaire au précédent (et le fait que $\tilde{D}_N$ est paire), l'égalité

$$S_N(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left((N + \frac{1}{2})t\right) \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(\frac{t}{2})} dt$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la fonction qui apparaît dans la fraction ci-dessus se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$ (on passe les détails...) et il suit que $S_N(f)(x) - \tilde{f}(x)$ tend vers 0.

On vient de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant.

★ Théorème 7.6 (Théorème de Dirichlet-Jordan)

Soit f une fonction 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour tout x la suite $(S_N(f)(x))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

7.6 Théorème de Fejér

La formule donnée à la page précédente pour $S_N(f)(x) - f(x)$ permet aussi de montrer que, si I est un intervalle ouvert sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$ (peut-être que f ou f' ont des points de discontinuité, mais ils sont hors de I) alors $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I ; mais en général, l'argument ci-dessus ne permet même pas de montrer la convergence simple de $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ en supposant simplement que f est continue (et en fait $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ ne converge pas toujours simplement, même si les contre-exemples sont délicats à construire à la main).

On suppose f continue et 2π -périodique; au lieu de considérer la suite $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$, on considère la suite de ses *moyennes de Cesàro* : on pose $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)$.

Comme dans la preuve du théorème de Dirichlet-Jordan, on réécrit $\sigma_N(f)$ (sous forme d'un produit de convolution) pour étudier sa convergence quand $N \rightarrow +\infty$. Cette fois, on doit considérer

$$\begin{aligned} F_N(y) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(y) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\sin((k + \frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} \\ &= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin(\frac{y}{2})} \sum_{k=0}^N \operatorname{Im}(e^{i(k+\frac{1}{2})y}) \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}y)}{\sin(\frac{y}{2})} \right)^2 \quad (\text{exercice : démontrer cette formule !}) \end{aligned}$$

Notons que $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 2\pi$ (cela se voit directement à partir de l'écriture de F_N comme une somme). Comme quand on a montré le théorème de Dirichlet-Jordan, on a

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt$$

Par conséquent, on a pour tout x

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2 dt \end{aligned}$$

Pour montrer que l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, on la découpe en deux morceaux. Fixons $\varepsilon > 0$, et trouvons η tel que $|x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ (c'est le théorème de Heine qui nous garantit l'existence d'un tel η). On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} (f(x-t) - f(x)) F_N(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \varepsilon |F_N(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \varepsilon F_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

La majoration ci-dessus est indépendante de N .

Sur la partie qui reste, on utilise le fait que f est bornée puisque continue et 2π -périodique, et on majore

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} (f(x-t) - f(x)) F_N(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} 2\|f\|_{\infty} F_N(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} \frac{2\|f\|_{\infty}}{(N+1) \sin(\frac{t}{2})^2} dt \\ &\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{(N+1) \sin(\frac{\eta}{2})^2} \end{aligned}$$

Pour tout N suffisamment grand, cette intégrale est donc plus petite, en module, que ε ; et on en conclut que pour N assez grand on a pour tout x $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$.

On vient de démontrer le résultat suivant (et la démonstration s'appuie sur des propriétés du *produit de convolution*).

★ Théorème 7.7 (Théorème de Fejér)

Soit f une fonction continue, 2π -périodique. Pour tout N on pose

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)$$

Alors $(\sigma_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

En particulier, toute fonction continue et 2π -périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques, donc d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$; cette preuve « par convolution » est proche d'une des preuves du théorème de Weierstrass établissant qu'une fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes (et on peut voir ces deux résultats comme cas particuliers d'un théorème plus général, le théorème de Stone-Weierstrass).

7.7 Coefficients de Fourier réels

Fixons une fonction f continue par morceaux et à valeurs réelles; on peut vouloir essayer de l'écrire comme somme d'une série trigonométrique réelle. On considère la famille de fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ (pour $n \geq 0$) et $x \mapsto \sin(nx)$ (pour $n \geq 1$). Ces fonctions sont continues, 2π -périodiques, deux à deux orthogonales pour le produit scalaire usuel; pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)^2 dx = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}
 c_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e^{int}} dt \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t) e^{int}} dt \quad (\text{puisque } \forall t, f(t) \in \mathbb{R}) \\
 &= \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt} \\
 &= \overline{c_{-n}(f)}
 \end{aligned}$$

En écrivant $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ on obtient pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} \\
 &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f) e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-N} c_n(f) e^{inx} \\
 &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f) e^{inx} + \sum_{n=1}^N c_{-n}(f) e^{-inx} \\
 &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i \sum_{n=1}^N (c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx) \\
 &= c_0(f) + 2 \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}(c_n(f)) \cos(nx) - 2 \sum_{n=1}^N \operatorname{Im}(c_n(f)) \sin(nx)
 \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que f est à valeurs réelles dans le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne)
Posons

$$\begin{aligned}
 a_0(f) &= c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\
 a_n(f) &= 2 \operatorname{Re}(c_n(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (n \geq 1) \\
 b_n(f) &= -2 \operatorname{Im}(c_n(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

Alors on a l'égalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nx)$$

Tous les résultats qu'on a écrits précédemment se reformulent avec ces notations (en supposant f 2π -périodique et à valeurs réelles) : convergence normale si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, convergence simple si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et théorème de Parseval, qui s'écrit cette fois sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2$$

Ici, le risque principal d'erreur vient du fait qu'on doit distinguer les cas $n = 0$, $n > 0$ pour la définition des coefficients de Fourier et pour appliquer la formule de Parseval. On peut se rappeler que « la raison » est que $\|x \mapsto \cos(nx)\|_2 = \|x \mapsto \sin(nx)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si $n \geq 1$, alors que $\|x \mapsto 1\|_2 = 1$ (et que la série de Fourier correspond à une projection orthogonale, qui se calcule en calculant des produits scalaires...).

L'unicité des développements en série de Fourier peut être utilisée pour simplifier les calculs a priori : par exemple, si f est paire et à valeurs réelles, alors on a $b_n(f) = 0$ pour tout n , et si f est impaire et à valeurs réelles alors $a_n(f) = 0$ pour tout n . C'est principalement dans ce cas qu'il peut être plus simple de passer par les coefficients réels.

7.8 Vocabulaire : sommes indexées par $\mathbb{Z}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Précisons ce qu'on entend ici par la convergence de séries doubles de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$: on considère

en fait la suite $\left(\sum_{n=-N}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ et c'est la convergence de cette suite que nos théorèmes évoquent (quand on parle de convergence de la série de Fourier en un point, ou quand on écrit le théorème de Parseval).

S'il y a convergence absolue (par exemple quand il y a convergence normale pour une série de fonctions, ou quand on considère une série à termes positifs comme dans le théorème de Parseval)

cela implique que les deux sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ convergent, mais ce n'est pas pareil en général.

La somme indexée par $\mathbb{Z}$ converge par exemple dès lors que $u_{-n} = -u_n$ pour tout n , alors que cette condition n'impose rien sur la convergence des deux sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=-1}^{+\infty} u_n$. Dans le

premier exercice ci-dessous, on voit d'ailleurs un exemple très simple de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $\sum_{n \geq 0} c_n(f)$ et $\sum_{n < 0} c_n(f)$ divergent toutes les deux (alors que le théorème de Dirichlet–Jordan assure que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)$ converge!).

Une autre définition sur laquelle il faut être au clair : celle de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Si $I = [a, b]$ est un segment, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Autrement dit : f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a_i, a_{i+1}[$, et f ainsi que chacune de ses dérivées $f^{(j)}$ admettent une limite à droite en a_i et à gauche en a_{i+1} . En particulier, f n'a qu'un nombre fini de discontinuités sur $[a, b]$ et en chacune de ces discontinuités elle admet une limite à gauche et une limite à droite.

Dans le cas d'un intervalle I qui peut être non borné, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si, pour chaque segment $[a, b]$ contenu dans I , la restriction de f à $[a, b]$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. En particulier, f peut avoir une infinité de discontinuités, mais alors elles s'accumulent vers les bornes de I . En pratique, il faut surtout comprendre cette notion dans le cas où I est un segment, et dans le cas $I = \mathbb{R}$.

7.9 Exercices

Exercice 7.8

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique impaire telle que $f(x) = 1$ pour $x \in]0, \pi[$, $f(\pi) = 0$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f et étudier la convergence de sa série de Fourier.
2. Donner les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 7.9

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique et telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de sa série de Fourier.
2. Donner les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 7.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Développer f en série de Fourier réelle. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et montrer que pour tout x on

$$a \quad |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(nx))^2}{4n^2-1}.$$

2. Soit h une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b h(x) |\sin(\lambda x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b h(x) dx$.

Exercice 7.11

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

En utilisant la formule de Parseval, et le lien entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$ pour $n \in \mathbb{Z}$, démontrer l'inégalité de Wirtinger : $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7.12

Soit f une fonction 2π -périodique.

1. On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $]0, 2\pi[$ et continue par morceaux. Montrer que la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f .
2. Étudier le cas de la fonction 2π -périodique f telle que $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 7.13

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on considère l'équation différentielle

$$y''(t) + (a + be^{2it})y(t) = 0 \quad (E_{a,b})$$

1. On suppose dans cette question que a est réel et $b = 0$. Résoudre $(E_{a,b})$ dans ce cas ; cette équation admet-elle des solutions non nulles 2π -périodiques ?
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que, pour tout $k > 0$, on a $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et $c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. a) Soit y une solution de $(E_{a,b})$ 2π -périodique. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que sa série de Fourier converge normalement vers y . Montrer qu'il en va de même pour chacune des dérivées $y^{(k)}$.
 b) Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une solution 2π -périodique de $(E_{a,b})$ vérifient la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f)$.
 c) Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $\gamma(0) = 1$ et $\gamma_n = \frac{b\gamma_{n-1}}{4n^2}$ pour $n > 0$. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2int}$ est une solution 2π -périodique de $(E_{0,b})$.

Exercice 7.14

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $B_0 = 1$ et, pour $n > 0$,

$$B'_n = nB_{n-1}, \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0$$

On note b_n le *nombre de Bernoulli* $B_n(0)$. Pour tout entier n on note A_n la fonction 2π -périodique égale à $B_n\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur $[0, 2\pi]$.

1. Montrer que A_n est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour tout $n \in \mathbb{N}$; pour quels n A_n est-elle continue ?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ et tout $n > 0$ on a $c_k(A_n) = -\frac{n!}{(2\pi i k)^n}$.
3. À l'aide de la série de Fourier de A_{2p} , montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1} \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} b_{2p}$$

(on rappelle que pour tout $s > 1$ on a $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$).

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.