Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2025–2026

Contrôle terminal – seconde session
Le 29 juin 2026 – durée 90 minutes
Le barème est donné à titre indicatif

Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés sont interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice # 1. (4 p.) Nous travaillons dans $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit

$$C \coloneqq \{(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2\,;\, 0 \leq a_n \leq 1/\sqrt{n+1},\, \forall\, n \geq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vide.

b) Si $x = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, montrer que $p_C(x) = (b_n)_{n\geq 0}$, avec

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{si } 0 \leq a_n \leq 1/\sqrt{n+1} \\ 1/\sqrt{n+1}, & \text{si } a_n > 1/\sqrt{n+1} \\ 0, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

Exercice # 2. (4 p.)

a) Rappeler le critère de Dini pour les séries de Fourier.

b) Soit $\alpha > 1$ un paramètre. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{1}{1 + |\ln|x||^{\alpha}}, & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f satisfait le critère de Dini en $x = 0$.

Exercice # 3. (6 p.) Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soient : (i) $1 < p < \infty$ et q le conjugué de p; (ii) $\alpha \coloneqq \dfrac{p-1}{p^2}$; (iii) $\beta \coloneqq \dfrac{(p-1)^2}{p}$; (iv) $f \in C_c^\infty(]0,\infty[;[0,\infty[)$; (v) $F(x) \coloneqq \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt, \forall\, x > 0$.

Tournez la page svp

a) En utilisant l'inégalité de Hölder à l'intégrale qui définit $F(x)$, montrer que

$$[F(x)]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} x^\beta \int_0^x t^{\alpha p}[f(t)]^p\, dt,\ \forall\, x > 0. \tag{1}$$

b) En intégrant (1) par rapport à x et en utilisant le théorème de Tonelli, en déduire l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^p}\, dx \leq C \int_0^\infty [f(x)]^p\, dx,$$

avec $0 < C < \infty$ une constante dont on donnera l'expression en fonction de p.

Exercice $\#$ 4. (6 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$, $h(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. (Donc $h(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.) Si $f \in \mathscr{L}^p$, posons $F := f * g$. Le but de cet exercice est de montrer que : (i) $F \in C^1$; (ii) $F' = f * h$.

a) Montrer (i) et (ii) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

b) Conclure.

Pour le point b), on pourra utiliser sans preuve le « théorème de Weierstrass » suivant. Si : (j) $(F_j) \subset C^1(\mathbb{R})$; (jj) $F, G \in C(\mathbb{R})$; (jjj) $F_j \to F$ simplement ; (jjjj) $F_j' \to G$ uniformément, alors : (ℓ) $F \in C^1$; ($\ell\ell$) $F' = G$.