Feuille de TD # 7

Espaces L^p. Convolution

Cadre. Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sont relatifs à cet espace mesuré.

Exercice # 1. (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Alors

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$.

Exercice # 2. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

a) $\|tf\|_p = |t|\, \|f\|_p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).
b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.
c) $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.
d) La définition de $\|f\|_\infty$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty]\,;\, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p.
e) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.)

Exercice # 3. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_\infty = \sup\limits_U |f|$.

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\, g \sim f_1 + t\, g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).
b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\, g \sim f_1\, g_1$.
c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.
d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$.
   (i) Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$.
   (ii) Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $h \sim h_1$, où

$$h(y) := f(x - y)\, g(y),\ h_1(y) := f_1(x - y)\, g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 5. Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.
b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.
c) Généralisation ?

Exercice # 6. Donner un sens aux expressions suivantes.

a) « $f \in L^p, f \geq 0$ ».

b) « $[f \in L^p,\ \|f\|_p = 0] \implies f = 0$ ».

Exercice # 7. Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

a) Si $f \in L^p$, alors f est mesurable.

b) Si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < \infty$, alors f est finie p. p.

c) $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_1/t,\ \forall\, t > 0$.

Plus généralement, si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, alors

$$f \in L^p \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_p^p/t^p,\ \forall\, t > 0 \text{ (\textit{inégalité de Markov})}.$$

Exercice # 8. Nous munissons les parties boréliennes U de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue λ_n. Décider pour quelles valeurs de p nous avons $f \in \mathscr{L}^p(U, \lambda_n)$ si :

a) $U :=]0,1]$, $f(x) := \dfrac{1}{x^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $U := \mathbb{R}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}}$.

c) $U :=]0,\infty[$, $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.

d) $U := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| \geq 1\}$, $f(x) := \dfrac{\sin|x|}{|x|^a}$, $a \in \mathbb{R}$ (avec « $|\ |$ » la norme euclidienne standard).

Exercice # 9. Soit $1 \leq p < \infty$. Si f est mesurable, soit

$$F_f(t) := \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\})$$

la *fonction de répartition de f*.

a) Si μ est σ-finie, montrer la *formule du gâteau en étages*

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty t^{p-1}F_f(t)\,dt. \tag{1}$$

b) Montrer que (1) reste vraie sans l'hypothèse μ σ-finie. Indications : commencer par une fonction étagée, et traiter le cas général par convergence monotone.

Exercice # 10. (Espaces ℓ^p)

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.

Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d. (Cas particuliers importants : $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}^*$.)

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que, si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_r \le \|(a_n)_n\|_p$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

e) Si $1 \le r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s\searrow r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

Exercice # 11. (Espaces L^p quand la mesure est finie) Nous supposons μ finie.

a) Montrer que si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

Plus spécifiquement, montrer que, $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|f\|_p \le (\mu(X))^{1/p-1/r} \|f\|_r$, $\forall f$.

b) Si une variable aléatoire positive a un moment d'ordre $k \ge 2$ fini, montrer que ses moments d'ordre ℓ, avec $1 \le \ell \le k-1$, sont finis.

c) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \le r < p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|f\|_s = \|f\|_r$.

d) Si $f \in L^\infty$, alors :

(i) $f \in L^p, \forall\, 1 \le p < \infty$.

(ii) L'application $[1,\infty] \ni p \mapsto \|f\|_p$ est continue. En particulier, $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice # 12. Rappelons la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt,\ \forall\, x > 0.$$

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0,\infty[$. On pourra utiliser la définition de la convexité et l'inégalité de Hölder.

Exercice # 13. Nous travaillons dans $I =]0,\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $1 \le p \le \infty$ et $f \in L^p(I)$. Posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall\, x \ge 0$.

a) Donner un sens à cette définition. Montrer que F est bien définie.

b) Si $p = \infty$, montrer que F est lipschitzienne.

c) Si $1 < p < \infty$, montrer que F est « hölderienne » : il existe $C < \infty$ et $\alpha \in]0,1[$ (que l'on déterminera) tels que $|F(x) - F(y)| \le C\,|x-y|^\alpha$, $\forall\, x, y \ge 0$.

d) Si $p = 1$, montrer que F est continue.

e) Si $p = 1$, montrer que F est « absolument continue » : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n$ sont tels que $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) < \delta$, alors $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \cdots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$. Indication : lemme de Lebesgue.

Exercice # 14. (Lemme de Brezis-Lieb) Soit $1 \le p < \infty$. Nous considérons une suite $(f_j) \subset \mathscr{L}^p$ telle que :

i) $\|f_j\|_p \le C_0 < \infty$, $\forall\, j$.

ii) $f_j \to f$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^p$.

b) A-t-on nécessairement $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$?

Dans la suite, nous nous proposons de montrer le *lemme de Brezis-Lieb*

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2}$$

En fait, nous allons montrer la conclusion plus forte

$$\int ||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p| \to 0. \tag{3}$$

c) Expliquer pourquoi (3) $\Longrightarrow$ (2).

d) Si $p = 1$, montrer que

$$||f_n| - |f - f_n|| \le |f|$$

et conclure via le théorème de convergence dominée.

e) Si $1 < p < \infty$, montrer que :

(i) Il existe $C < \infty$ telle que

$$||t|^p - |t-1|^p - 1| \le \begin{cases} C, & \text{si } |t| \le 1 \\ C|t|^{p-1}, & \text{si } |t| \ge 1 \end{cases}.$$

(ii) En déduire que

$$||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \le \begin{cases} C|f|^p, & \text{si } |f_n| \le |f| \\ C|f_n|^{p-1}|f|, & \text{si } |f_n| \ge |f| \end{cases}. \tag{4}$$

(iii) Soit $M \ge 1$. On définit

$$A_{n,M} := \{x \in X\,;\, |f_n(x)| \le M|f(x)|\},$$
$$B_{n,M} := \{x \in X\,;\, |f_n(x)| > M|f(x)|\}.$$

En utilisant (4) et le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_{A_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \to 0.$$

(iv) Montrer que

$$\int_{B_{n,M}} |f|^p \le \frac{C_0^p}{M^p}. \tag{5}$$

(v) Utiliser (5), la deuxième inégalité de (4) et l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n \int_{B_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p|| = 0.$$

(vi) Conclure.

Exercice # 15. Soit $1 \le p \le \infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 16. a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.

Soient $f \in L^p\backslash\{0\}$ et $g \in L^q\backslash\{0\}$, avec $1 < p, q < \infty$ conjugués et $f, g \ge 0$. Alors

$$\int fg = \|f\|_p \, \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f^p = C\, g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus $f, g \geq 0$, montrer que

$$\int fg = \|f\|_p \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0,\infty[\text{ tel que } |f|^{p-1} f = C\, |g|^{q-1} g].$$

Exercice # 17. a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.

Si $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p \backslash \{0\}$, alors

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \iff [\exists\, C \in]0,\infty[\text{ tel que } f = C\, g].$$

b) Que devient cette condition si $p = 1$?

Exercice # 18. Soient $1 \leq p_2, \ldots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 19. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{\theta} \|f\|_{p_1}^{1-\theta}$, $\forall\, f$.

Exercice # 20. (Inégalités pour des opérateurs à noyau) Nous travaillons dans un espace produit $(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$, avec μ et ν σ-finies. Toutes les fonctions considérées sont *mesurables* et, par souci de simplicité, *positives*. Un *noyau* est une fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}_+$.

Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f,g) := \int_{X\times Y} K(x,y)\, f(x)\, g(y)\, d\mu \otimes \nu(x,y),\ \text{avec } f : X \to \mathbb{R}_+,\ g : Y \to \mathbb{R}_+,$$
$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_Y K(x,y)\, f(x)\, d\mu(x) \right\|_p \text{ avec } f : X \to \mathbb{R}_+.$$

a) Montrer que

$$B(f) = \sup\{A(f,g)\,;\ g \in \mathscr{L}^q(Y;\mathbb{R}_+),\ \|g\|_q \leq 1\}.$$

b) Soient $\alpha : X \to \mathbb{R}_+^*$, $\gamma : Y \to \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'identité (évidente)

$$K(x,y)\, f(x)\, g(y) = \left([K(x,y)]^{1/p} \frac{\alpha(x)}{\gamma(y)} f(x) \right) \times \left([K(x,y)]^{1/q} \frac{\gamma(y)}{\alpha(x)} g(y) \right),$$

l'inégalité de Hölder (avec les exposants p et q) et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned} A(f,g) \leq & \left(\int_X F(x)\, \alpha^p(x)\, f^p(x)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ & \times \left(\int_Y G(y)\, \gamma^q(y)\, g^p(y)\, d\nu(y) \right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x,y)}{\gamma^p(y)} d\nu(y),\ G(y) := \int_X \frac{K(x,y)}{\alpha^q(x)}\, d\mu(x).$$

c) (Inégalité de Schur) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$, $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir l'*inégalité de Schur*

$$B(f) \leq \left[\sup_{x\in X} \int_Y K(x,y)\, d\nu(y)\right]^{1/p} \left[\sup_{y\in Y} \int_X K(x,y)\, d\mu(x)\right]^{1/q} \|f\|_p.$$

d) (Inégalité de Young) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$ et $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir, pour $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, l'*inégalité de Young* $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$.

e) (Inégalité de Hardy) En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x f(y)\, dy\right)^p dx \leq q^p \int_0^\infty f^p(x)\, dx.$$

f) (Inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz) *Préliminaire.* Nous admettons la *formule des compléments* (due à Euler)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)\, t^a}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},\ \forall\, 0 < a < 1.^{*}$$

En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, montrer les *inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$
$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\, dx\right|^p dy \leq \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right)^p \|f\|_p^p.$$

Exercice # 21. (Inégalité de Hardy, encore) Nous proposons ici une autre approche pour montrer l'inégalité de Hardy obtenue dans l'item e) de l'exercice précédent. Nous travaillons dans $I =]0,\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(I)$, nous posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall\, x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\, dx. \tag{7}$$

b) Montrer que l'inégalité (7) reste vraie pour tout $f \in \mathscr{L}^p$.

Exercice # 22. (Inégalité de Landau)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite $(R_n)_n$ telle que :
   (i) $2n \leq R_n \leq 2n+1$, $\forall\, n$.
   (ii) $f(R_n) \to 0$.

b) Si, de plus, f est dérivable, montrer qu'il existe une suite $(S_n)_n$ telle que
   (i) $R_n < S_n < R_{n+1}$, $\forall\, n$ (et donc $S_n \to \infty$).
   (ii) $f(S_n)\, f'(S_n) \to 0$.

   Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f^2.

   De même, il existe $(T_n)_n$ telle que $T_n \to -\infty$ et $f(T_n)\, f'(T_n) \to 0$.

*. Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

c) (Inégalité de Landau) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f soit (Lebesgue) intégrable et f'' soit bornée. Montrer que $f' \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ et l'*inégalité de Landau*

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On pourra commencer par calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x)\, dx$ si, de plus, $f \in C^2$.

Exercice # 23. a) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\{f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)\, ;\, f \text{ étagée}\}$ est dense dans $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)$. Il convient de distinguer les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

b) On travaille dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$, avec μ mesure de Radon. Si $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{K_j}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*,\ a_j \in \mathbb{R},\ K_j \text{ compact},\ \forall\, j \right\}$$

est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$.

Exercice # 24. a) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to]0, \infty[$ deux fonctions mesurables telles que $f \cdot g \geq 1$. Montrer que $\int f\, dP \cdot \int g\, dP \geq 1$. Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.

b) Si $a_1, \ldots, a_n > 0$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$.

Exercice # 25. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 26. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.
b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.
c) $\int \rho_\varepsilon = 1$.

Exercice # 27. Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall\, \varepsilon > 0$.
ii) $\int \zeta^\varepsilon = 1, \forall\, \varepsilon > 0$.
iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\int |\zeta^\varepsilon| \leq M, \forall\, \varepsilon > 0$.
iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

a) Montrer que, si $\rho \in \mathscr{L}^1(R^N)$ (avec la mesure de Lebesgue) et $\int \rho = 1$, alors $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, est une approximation de l'identité.

b) Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.
   (i) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.
   (ii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.
   (iii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (avec la mesure de Lebesgue), montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 28. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.
b) $f * \varphi \in C^k$.
c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.
d) Si f est un polynôme (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice # 29. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ quand $j \to \infty$ dans $\mathscr{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$.

Exercice # 30. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$.

Exercice # 31. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Soient p, q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, montrer que $f * g$ est continue.

Exercice # 32. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathscr{L}_n$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

a) Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.
b) Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.
c) Calculer $\int f$ et conclure.

Exercice # 33. (Résolution de l'équation de la chaleur dans le demi-espace) Nous travaillons dans $(R^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. $|\ |$ désigne la longueur euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$. (Donc $|x| = \|x\|_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.) Soit

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0,$$

le *noyau de la chaleur*.

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{L}^p$. Sous réserve d'existence, soit

$$u(x,t) := f * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_t(x-y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0.$$

a) Montrer que :
   (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$.
   (ii) u vérifie l'*équation de la chaleur* homogène

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[.$$

b) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que « $u(\cdot, 0) = f$ »[†], au sens où

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } \mathscr{L}^p.$$

c) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

†. Noter que u n'est pas définie pour $t = 0$.

d) Si f est uniformément continue et bornée, montrer que

$$u(\cdot, t) \to f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ quand } t \to 0.$$

Exercice # 34. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; x + y \in E\}.$$

a) Montrer que F est borélien.
b) Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F)$, $\forall E \in \mathscr{B}_{R^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν, noté $\mu * \nu$.
c) Montrer que le produit de convolution est commutatif.
d) Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.
e) Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.
f) Si μ et ν sont des mesures à densités f, respectivement g, par rapport à ν_n, montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.
g) Si μ est à densité f par rapport à ν_n, alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 35. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si f est Lebesgue intégrable et μ est finie, alors $f*\mu$ est définie ν_n-p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.
b) Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et μ est une mesure de Radon, alors $f * \mu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k.

Exercice # 36. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\},\ g(x + y) = g(x)\, g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (8), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{10}$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (9), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{\imath Ax}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{11}$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g, mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (10) et (11) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \text{ alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y)\, \psi(y)\, dy \neq 0. \tag{12}$$

a) Soit g solution Lebesgue mesurable de (9). En multipliant (9) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (12) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y, montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

b) Soit f une solution Lebesgue mesurable de (8). Soit $g := e^{\imath f}$. En utilisant la question précédente pour g, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi\, h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

c) (i) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$h(x + y) = h(x) + h(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).

Montrer que $h(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Conclusion ?

d) Montrons (12). Soit $A := \{y \in \mathbb{R}\,;\ g(y) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi $\lambda_1(A) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $K \subset A$ un compact tel que $\nu_1(K) > 0$. Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit ρ un noyau régularisant. Montrer que (12) est vraie si $\psi := (\operatorname{sgn} g\, \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

e) Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$.