Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 2e année

UE Analyse IV — Année 2025–2026

Contrôle terminal

Éléments de correction

Question de cours. (4 p.) Compléter et montrer le résultat suivant : si f est deux fois différentiable et $g(t) := f((1-t)x + ty)$, alors g est deux fois dérivable, $g'(t) = \cdots$ et $g''(t) = \cdots$ (Donner et montrer les formules.)

Solution. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. La fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(t) := (1-t)x + ty$ est C^∞, car toutes ses coordonnées le sont. Le domaine de définition de g est $J := \{t \in \mathbb{R}\,;\ (1-t)x + ty \in U\}$, qui est ouvert, car $J = h^{-1}(U)$. Sur J, nous avons $g = f \circ h$.

Si f est différentiable, la règle de la chaîne nous donne que g l'est aussi, ce qui revient à g dérivable. Avec $h_j(t) = (1-t)x_j + ty_j$, $j = 1, \ldots, n$, les coordonnées de h, la règle de la chaîne donne, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(h(t)) h_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)((1-t)x + ty)(y_j - x_j) \\ &= [(\nabla f)((1-t)x + ty)] \cdot (y - x). \end{aligned} \tag{1}$$

Si f est deux fois différentiable, $\partial_j f$ est différentiable, $j = 1, \ldots, n$. Le raisonnement précédent, avec $\partial_j f$ à la place de f, montre que $J \ni t \mapsto (\partial_j f)((1-t)x + ty)$ est dérivable, et que sa dérivée est

$$\frac{d}{dt}[(\partial_j f)((1-t)x + ty)] = \sum_{p=1}^{n} (\partial_p \partial_j f)((1-t)x + ty)(y_p - x_p). \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), nous obtenons que g est deux fois dérivable et, pour $t \in J$,

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (\partial_p \partial_j f)((1-t)x + ty)(y_p - x_p)(y_j - x_j) = [(H_{(1-t)x+ty} f)(y - x)] \cdot (y - x).$$

(Les arguments sont les mêmes si $f : U \to F$, avec F normé.) □

Exercice # 1. (3 p.) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue.

Solution. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, comme quotient de la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ et de la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^4 + y^4}$, qui est continue (comme composée de fonctions continues) et non-nulle.

Pour conclure, il faut donc montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Pour le calcul de la limite, toute norme convient. Le dénominateur suggère de prendre la norme $\|\ \|_4$ (mais d'autres choix sont possibles). Nous avons, si $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$0 \le |f(x, y)| = \frac{|x^3 - 3xy^2|}{\|(x, y)\|_4^2} \le \frac{|x|^3 + 3|x||y|^2}{\|(x, y)\|_4^2} \le \frac{\|(x, y)\|_4^3 + 3\|(x, y)\|_4 \|(x, y)\|_4^2}{\|(x, y)\|_4^2} = 4\|(x, y)\|_4,$$

d'où, par encadrement (théorème des gendarmes), $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. □

Exercice # 2. (2 p.) Calculer explicitement :

(a) $d_1 f$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (On justifiera l'existence de $d_1 f$.)

(b) $\nabla f(1,2,3)$, où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := xyz$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.

(c) $H_{(1,1,2)} f$, où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := xyz$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.

Solution. (a) f est dérivable, donc différentiable, et $d_1 f(h) = f'(1)h = e\,h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$. (b) Nous avons $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$, d'où $\nabla f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (c) Nous avons $H_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$, d'où $H_{(1,1,2)} f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Exercice # 3. (2 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(2t - t^2, t + t^3)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Solution. Notons (x,y) l'argument de f (donc $f = f(x,y)$). La fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (2t - t^2, t + t^3)$ étant dérivable (car ses coordonnées le sont), donc différentiable , la règle de la chaîne montre que g est différentiable, donc dérivable, et

$$g'(t) = (\partial_x f)(2t - t^2, t + t^3)(2 - 2t) + (\partial_y f)(2t - t^2, t + t^3)(1 + 3t^2).$$ □

Exercice # 4. (2,5 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 2x^2 + 3\cos(xy)$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$. Écrire, pour f, la formule de Taylor-Young en $(0,0)$, à l'ordre deux et avec point intermédiaire.

Solution. f est clairement C^∞, et $f(0,0) = 3$. Par ailleurs, nous avons $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 3y\sin(xy) \\ -3x\sin(xy) \end{pmatrix}$, respectivement $H_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 4 - 3y^2\cos(xy) & -3\sin(xy) - 3xy\cos(xy) \\ -3\sin(xy) - 3xy\cos(xy) & -3x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, d'où en particulier $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La formule demandée devient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(z,t) \in](0,0),(x,y)[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3 + \frac{1}{2}[(H_{(z,t)} f)(x,y)] \cdot (x,y) \\ &= 3 + \frac{1}{2}\big[(4 - 3t^2\cos(zt))x^2 - 6(\sin(zt) + zt\cos(zt))xy - 3z^2(\cos(zt))y^2\big]. \end{aligned}$$ □

Exercice # 5. (3 p.) Déterminer si la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$, admet un extremum local.

Solution. Clairement, $f \in C^\infty$ et nous avons $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z \\ 2 - 6y \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$ et $H_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de la matrice hessienne est (à un signe près) $X(X+6)^2 - 4(X+6) = 0$, de racines -6, $-3 - \sqrt{13}$ et $-3 + \sqrt{13}$. Comme la matrice hessienne a à la fois une racine > 0 et une racine < 0, f n'a pas d'extremum local. (Ses éventuels points critiques sont des points-selles.) □

Exercice # 6. (4,5 p.) Calculer $\max\{2x + 3y\,;\, x^2 - xy + y^2 \leq 21\}$.

Solution. Notons $f(x,y) := 2x+3y$, $g(x,y) := x^2-xy+y^2-21$, $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, g(x,y) \le 0\}$. Le problème s'écrit (P) $\max\{f(x,y)\,;\,(x,y) \in V\}$.

Dans un premier temps, montrons que le $\max$ est atteint. f étant clairement continue, il suffit de montrer que V est compact. D'une part, $V = g^{-1}(]-\infty,0])$ est fermé (g est continue, $]-\infty,0]$ est fermé). D'autre part, nous avons

$$(x,y) \in V \Leftrightarrow x^2-xy+y^2 \le 21 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \le 21 \Rightarrow \frac{3}{4}y^2 \le 21 \Rightarrow y^2 \le 28 \Rightarrow |y| \le \sqrt{28},$$

et de même $|x| \le \sqrt{28}$. Il s'ensuit que V est borné, donc finalement compact.

Soit (x,y) solution de (P). Si la contrainte g n'est pas active en (x,y), alors $\nabla f(x,y) = 0$, ce qui est impossible. La contrainte g est donc active en (x,y), d'où les vecteurs $\nabla f(x,y)$ et $\nabla g(x,y)$ sont liés : il existe λ_0, λ_1 pas les deux nuls tels que, au point (x,y), on ait :

$$\begin{cases} \lambda_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2-xy+y^2 = 21 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 = 0$, alors la première équation donne $\lambda_0 = 0$, ce qui est impossible. Donc $\lambda_1 \neq 0$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2x-y = -2\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} \\ 2y-x = -3\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} \\ x^2-xy+y^2 = 21 \end{cases}$$

Des deux premières équations, nous avons $3(2x-y) = 2(2y-x)$, d'où $y = (8/7)x$. En remplaçant dans la dernière équation, nous trouvons $x^2 = 49 \cdot 7/19$, d'où soit $(x,y) = (7\sqrt{7/19}, 8\sqrt{7/19})$, soit $(x,y) = (-7\sqrt{7/19}, -8\sqrt{7/19})$. En comparant les valeurs de f dans ces deux points, le maximum vaut $36\sqrt{7/19}$ et est atteint en $(7\sqrt{7/19}, 8\sqrt{7/19})$. □

Exercice # 7. (1 p.) Modéliser le problème suivant : parmi tous les triangles rectangles de périmètre 1 m, en trouver un d'aire maximale.

Solution. Les inconnues du problème sont les longueurs $a > 0$ et $b > 0$ des cathètes du triangle. L'hypothénuse étant de longueur $\sqrt{a^2+b^2}$ et l'aire du triangle $\frac{1}{2}ab$, le problème devient : trouver $\max \frac{1}{2}ab$ sous les contraintes $a > 0$, $b > 0$, $a+b+\sqrt{a^2+b^2} = 1$. □