Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 2^{e} année

UE Analyse IV — Année 2025–2026

Contrôle terminal – seconde session

Le 30 juin 2026 – durée 120 minutes

Le barème est donné à titre indicatif

Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés sont interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Question de cours. (3 p.) Énoncer et montrer le théorème de Fermat.

Exercice # 1. (4 p.) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Indication : considérer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ pour $v = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $v = (1, 1)$.

Exercice # 2. (3,5 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, une fonction deux fois différentiable. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(t^2 - t, e^t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Montrer que g est deux fois dérivable et exprimer $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exercice # 3. (3,5 p.) Déterminer la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^3 - 3xy + y^3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice # 4. (4,5 p.) On considère le problème de minimisation $\min\{32x + y^2\,;\ x^2 \leq y\}$.

(a) On suppose, dans un premier temps, le minimum atteint dans ce problème. Calculer la valeur du minimum, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Fritz John.

(b) Sans supposer le minimum atteint, vérifier que la valeur trouvée dans la question précédente est bien la valeur minimale recherchée, et que donc, en particulier, le minimum est bien atteint.

Exercice # 5. (1,5 p.) Modéliser le problème suivant. Trouver l'emplacement idéal d'un nœud de raccordement optique desservant quatre quartiers d'une commune, de populations respectivement de 1 000, 1 200, 1 500 et 2 000 habitants.