Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Complément $\#2$
– 10 février 2020 –

Deuxième partie. Calcul différentiel

Chapitre $\#$1. Différentielle

Le cadre est le suivant :

1. $(E, \| \ \|)$ est un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
   Cas particulier important : $E = \mathbb{R}^n$.
2. U est un ouvert de E.
3. $(G, ||| \ |||)$ est un espace normé sur $\mathbb{R}$.
   Cas particulier important : $(G, ||| \ |||) = (\mathbb{R}, | \ |)$.
4. $f : U \to G$.
   Cas particulier important : $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

Proposition 1. Soit $f : U \to G$ différentiable (en $a \in U$). Alors f est continue (en a).

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $B(a, R) \subset U$. Nous avons

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h),\ \|h\| < R,$$

avec $d_a f : E \to G$ linéaire et $\varepsilon_1(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$.

Il s'ensuit que, si $\|x - a\| < R$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) =& f(a + (x - a)) - f(a) = d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x - a) \\ =& O(\|x - a\|) + o(\|x - a\|) = o(1) + o(1) = o(1) \end{aligned}$$

quand $x \to a$. f est donc continue en a. $\square$

Proposition 2. Soient $f, g : U \to G$ différentiables (en $a \in U$), et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ est différentiable (en a) et $d_a(f + \lambda g) = d_a f + \lambda d_a g$.

Démonstration. Avec R comme ci-dessus, nous avons

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h),\ \|h\| < R,$$
$$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + \varepsilon_2(h),\ \|h\| < R,$$

avec $d_a f, d_a g : E \to G$ linéaires et $\varepsilon_j(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$. Il s'ensuit que

$$(f + \lambda g)(a+h) = (f + \lambda g)(a) + (d_a f + \lambda d_a g)(h) + \varepsilon(h),\ \|h\| < R, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) :=& \varepsilon_1(h) + \lambda \varepsilon_1(h) = o(\|h\|) + O(1)\, o(\|h\|) \\ =& o(\|h\|) + o(\|h\|) = o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0. \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant (1), (2) et le fait que $d_a f + \lambda d_a g$ est linéaire, nous obtenons $d_a(f + \lambda g) = d_a f + \lambda d_a g$. □

Proposition 3. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to G$ différentiables (en $a \in U$). Alors $fg : U \to G$ est différentiable (en $a \in U$) et

$$d_a(fg)(h) = f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a),\ \forall\, h \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Démonstration. Soit R comme ci-dessus. Nous avons

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h),\ \|h\| < R,$$
$$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + \varepsilon_2(h),\ \|h\| < R,$$

avec $d_a f : E \to \mathbb{R}$, $d_a g : E \to G$ linéaires et $\varepsilon_j(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$. Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
f(a+h)g(a+h) =& [f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h)] [g(a) + d_a g(h) + \varepsilon_2(h)] \\
=& f(a)g(a) + [f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a)] \\
& + \varepsilon_1(h) [g(a) + d_a g(h) + \varepsilon_2(h)] \\
& + \varepsilon_2(h) [f(a) + d_a f(h)] + d_a f(h)\, d_a g(h) \\
=& f(a)g(a) + [f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a)] \\
& + o(\|h\|) [O(1) + O(\|h\|) + o(\|h\|)] \\
& + o(\|h\|) [O(1) + O(\|h\|)] + O(\|h\|)\, O(\|h\|) \\
=& f(a)g(a) + [f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a)] \\
& + o(\|h\|) + o(\|h\|^2) + o(\|h\|^2) + o(\|h\|) \\
& + o(\|h\|^2) + O(\|h\|^2) \\
=& f(a)g(a) + [f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a)] + o(\|h\|),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

les o s'entendant quand $h \to 0$.

Par ailleurs,

$$E \ni h \mapsto f(a)\, d_a g(h) + d_a f(h)\, g(a)$$

est linéaire (vérifier). En utilisant ce fait et (4), nous obtenons (3). $\square$

Proposition 4. Nous supposons G de dimension finie. Soit V un ouvert de G. Soit $(H, \rangle, \langle)$ un espace normé sur $\mathbb{R}$. Soient $f : U \to G$ telle que $f(U) \subset V$ et $g : V \to H$. Si f est différentiable (en $a \in U$) et g est différentiable (en $b := f(a)$), alors $g \circ f$ est différentiable (en $a \in U$) et

$$d_a(g \circ f)(h) = d_{f(a)} g[d_a f(h)], \forall\, h \in E, \tag{5}$$

ou encore

$$d_a(g \circ f) = [d_{f(a)} g] \circ [d_a f]. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $B(f(a), r) \subset V$. f étant continue en a, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$[x \in U,\ \|x - a\| < \delta] \implies \|\!|f(x) - f(a)|\!\| < r.$$

Par ailleurs, il existe $R > 0$ tel que $B(a, R) \subset U$. Soit $\rho := \min\{\delta, R\}$. Nous avons alors

$$\|h\| < \rho \implies a + h \in B(a, \rho) \implies [a + h \in U,\ f(a + h) \in B(f(a), r)].$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h),\ \|h\| < \rho,\\
&g(f(a) + k) = g(f(a)) + d_{f(a)} g(k) + \varepsilon_2(k),\ \|\|k\|\| < r
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$ et $\varepsilon_2(k) = o(\|\|k\|\|)$ quand $k \to 0$.

Si $\|h\| < \rho$, alors (les o étant entendus quand leurs arguments tendent vers 0)

$$\begin{aligned}
g(f(a + h)) =& g(f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h))\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h) + \varepsilon_1(h)) + \varepsilon_2(d_a f(h) + \varepsilon_1(h))\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h)) + d_{f(a)} g(\varepsilon_1(h))\\
&+ o(d_a f(h) + \varepsilon_1(h))\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h)) + O(\varepsilon_1(h))\\
&+ o(O(\|h\|) + o(\|h\|))\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h)) + O(o(\|h\|)) + o(O(\|h\|))\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h)) + o(\|h\|) + o(\|h\|)\\
=& g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h)) + o(\|h\|)\\
=& g(f(a)) + [d_{f(a)} g] \circ [d_a f](h) + o(\|h\|).
\end{aligned}$$

L'application $[d_{f(a)} g] \circ [d_a f]$ étant linéaire, nous obtenons (5). $\square$