Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Maths 5 Cours : P. Mironescu, TD : O. Kravchenko

Feuille d'exercices n° 4
COURBES

Exercice 1. **Droite.** Trouver une paramétrization qui parcours le segment de la droite $y = 2x + 1$ du point $A(0, 1)$ au point $B(1, 3)$ $\gamma_1 : [0, 1] \to (AB)$ et une autre $\gamma_2 : [0, 1] \to (BA)$ qui va dans le sens opposé.

Exercice 2. **Hyperbole équilatère.** Soit Γ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ vérifient : $x^2 - y^2 = 1$. Soit $\gamma : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$\gamma(t) = \frac{t}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{2t}(\vec{i} - \vec{j}).$$

Autrement dit, $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t}$.

1. Montrer que $\gamma(t)$ définit en effet la courbe paramétrée Γ.
2. Calculer l'équation paramétrée de la droite tangente au point $\gamma(t)$.
3. Y-a-t-il des tangentes verticales ?

Exercice 3. **Strophoïde droite.** Dans un repère orthonormé $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ on pose

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\ (\ \vec{i} + t\ \vec{j}\ ) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Quels sont les points multiples de la courbe γ paramétré par M? Dessiner cette courbe.

Exercice 4. Paramétrer la courbe $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 5. **Spirale logarithmique.** La spirale logarithmique est définie par $\gamma(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 6. **Folium de Descarte.** On considère la courbe paramétrée Γ suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}).$$

1. Calculer, pout tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, $x(1/t)$ et $y(1/t)$. En déduire qu'on peut se ramener à étudier Γ sur $] - 1, 1]$.
2. Dresser le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$.
3. (a) Calculer pour tout $t \in] - 1, 1]$, $y(t) + x(t) + 1$.
   (b) Déterminer le signe de cette expression $t \in] - 1, 1]$, puis sa limite quand t tend vers -1.
   (c) Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
4. Tracer Γ.

Exercice 7. **Astroïde.** Tracer la courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Rappel : Tangente et plan normale à une courbe dans $\mathbb{R}^3$.

Une courbe peut être définie dans l'espace par des équaitions paramétriques :

$$\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t)), \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Au point P_0 de la courbe (en $t = t_0$: $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)),$) les équations de la tangente sont

$$\frac{x - x_0}{\partial x/\partial t} = \frac{y - y_0}{\partial y/\partial t} = \frac{z - z_0}{\partial z/\partial t}$$

et les équations du plan normal (orthogonal à la tangente et passant par P_0) sont

$$\frac{\partial x}{\partial t}(x - x_0) + \frac{\partial y}{\partial t}(y - y_0) + \frac{\partial z}{\partial t}(z - z_0) = 0$$

Dans les deux formules, il est bien entendu que les dérivées sont calculées au point P_0.

Exercice 8. Trouver les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

1. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ au point $t = 1$.
2. $x = t - 2,\ y = 3t^2 + 1,\ z = 2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 9. Une particule se déplace dans l'espace et son movement décrit une courbe

$$x(t) = 4\cos t, y(t) = 4\sin t, z(t) = 6t.$$

Trouver les valeurs absolues de la vitesse et de l'accélération au temps $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Trouver aussi les equations de la droite tangente et du plan normale dans chaqune de ces points.

Exercice 10. Trouver les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

$$x = t - 2, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3,$$

au point où celle-ci coupe le plan yOz.