ISFA 2009-2010
Optimisation

Examen d'Optimisation
Le jeudi 6 mai de 9 heures à 11 heures
Tous documents autorisés

Exercice 1

On considère la matrice du laplacien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si} & i = j \\ -1 & \text{si} & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si} & |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

avec n naturel, $n \geq 2$.

a) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \cdots n\}$ le nombre réel

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \tag{1}$$

est une valeur propre de A avec vecteur propre associé $v^k \in \mathbb{R}^n$ dont la j- ème composante est donnée par

$$v_j^k = \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right).$$

b) Montrer que les seules valeurs propres de la matrice A sont celle données par (1).

c) On considère la décomposition $A = D - E - F$ donnée en cours (D diagonale, E triangulaire inférieure avec 0 sur la diagonale et F triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale). On considère la matrice de Jacobi notée J associée à la méthode itérative de Jacobi pour la résolution du système linéaire

$$Ax = b. \tag{2}$$

Rappellons qu'on a $J = D^{-1}(E+F)$.
Ecrire la matrice J comme une expression de I_n et de A, où I_n désigne la matrice identité en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer la convergence de la méthode itérative de Jacobi pour la résolution numérique de (2).

e) On suppose ici $n = 3$. Montrer la convergence de la méthode itérative de Gauss-Seidel pour la résolution numérique de (2).

Exercice 2 Trouver, par la méthode du simplexe à une phase, la quantité $\max(2x_1 + 3x_2 + 5x_3)$ sous les contraintes

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1+2x_2+4x_3 \leq 5, x_1+x_2+3x_3 \leq 4, 3x_1+5x_2+x_3 \leq 12.$$

Donner aussi la solution optimale.
Trouver, à l'aide du logiciel R, la solution du problème ci-dessus lorsque 12 est remplacé par 16.

Exercice 3 Soit $g \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout x et telle qu'il existe y tel que $g(y) = 0$.
On rappelle que la méthode de Newton pour trouver y consiste à calculer y comme limite de la suite (x^j), où x^0 est quelconque et $x^{j+1} = x^j - \dfrac{g(x^j)}{g'(x^j)}$. Montrer que, si g est convexe, alors la méthode de Newton converge pour tout x^0.

Exercice 4 Montrer que $\min(x^2 + y^2)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 - 2x - 4y \geq 4$ est atteint. Trouver la valeur du minimum.