Balles et ballons de sportifs : des formes surprenantes !

Marielle Simon
(INRIA)

Maths & Sport

ESPE Lille Nord de France, Mars 2016

Présentation basée sur des articles d'É. Ghys (Lyon) et M. Audin (Strasbourg), WEBSITE Images des mathématiques

CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS

Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Ballon officiel : Euro 2016

Ballon officiel : Euro 2016

Règlement de la FIFA : le ballon doit être

- sphérique
- en cuir ou dans une autre matière adéquate
- d'une circonférence comprise entre 68 et 70 cm
- d'un poids compris entre 410 et 450 g au début du match
- d'une pression comprise entre 0,6 et 1,1 atmosphère.

Dessine-moi un ballon

Règlement de la FIFA : le ballon doit être

- sphérique
- en cuir ou dans une autre matière adéquate

entre autres: *caoutchouc, Adicron, latex, néoprène, polyuréthane, mousse syntactique, micro-billes de gaz,...*

Dessine-moi un ballon

Histoire de ballons

1930 (T-shape)

Brésil 1950

Chili 1962

Histoire de ballons

1930 (T-shape)

Brésil 1950

Chili 1962

1970 : la star !

...jusqu'en 2002

Histoire de ballons

1930 (T-shape)

Brésil 1950

Chili 1962

1970 : la star !

...jusqu'en 2002

2010 : la controverse

Histoire de ballons

1930 (T-shape)

Brésil 1950

Chili 1962

1970 : la star !

...jusqu'en 2002

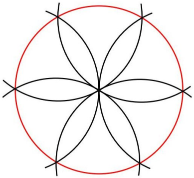
2014 : l'innovation

Commençons par les hexagones

- Il est très facile de construire un hexagone :

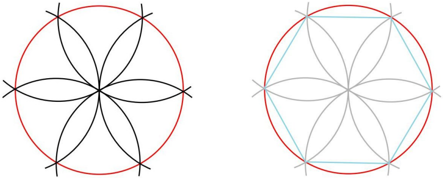
Commençons par les hexagones

- Il est très facile de construire un hexagone :



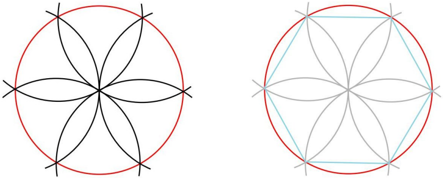
Commençons par les hexagones

- Il est très facile de construire un hexagone :

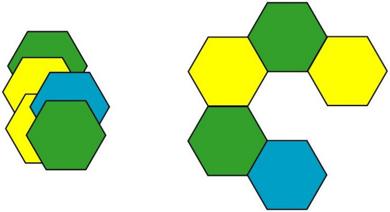


Commençons par les hexagones

- Il est très facile de construire un hexagone :

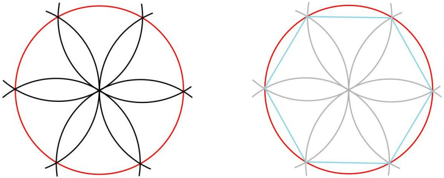


- Mais aussi de les assembler !

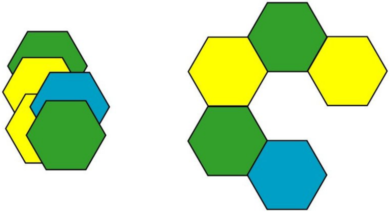


Commençons par les hexagones

- Il est très facile de construire un hexagone :



- Mais aussi de les assembler !



Pourquoi n'arrive-t-on pas à former un ballon ?

Définition

1. Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des **faces** planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle **arêtes**.

Définition

1. Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des **faces** planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle **arêtes**.

Définition

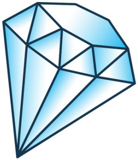
1. Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des **faces** planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle **arêtes**.
2. Un polyèdre est **convexe** si tout point de tout segment joignant deux points quelconques du polyèdre appartient encore au polyèdre.

Définition

1. Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des **faces** planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle **arêtes**.

2. Un polyèdre est **convexe** si tout point de tout segment joignant deux points quelconques du polyèdre appartient encore au polyèdre.

Des exemples !



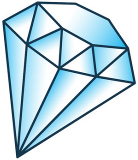
Le diamant ✓

Définition

1. Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des **faces** planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle **arêtes**.

2. Un polyèdre est **convexe** si tout point de tout segment joignant deux points quelconques du polyèdre appartient encore au polyèdre.

Des exemples !



Le diamant ✓

L'étoile ✗

Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

La formule d'Euler

Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

$$\Rightarrow \quad \boxed{F - A + S = 2}$$

Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

$$\Rightarrow \quad \boxed{F - A + S = 2}$$

Vérifions !

1. **Le cube**
2. **La pyramide**
3. **Le diamant**

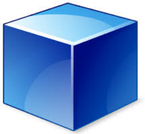
Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

$$\Rightarrow \quad \boxed{F - A + S = 2}$$

Vérifions !

1. **Le cube**



$$6 - 12 + 8 = 2$$

2. **La pyramide**
3. **Le diamant**

LA FORMULE D'EULER

Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

$$\Rightarrow \quad \boxed{F - A + S = 2}$$

Vérifions !

1. **Le cube**
2. **La pyramide**

$$5 - 8 + 5 = 2$$

3. **Le diamant**

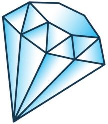
Prenons un polyèdre convexe avec

- un nombre F de faces
- un nombre A d'arêtes
- un nombre S de sommets

$$\Rightarrow \quad \boxed{F - A + S = 2}$$

Vérifions !

1. **Le cube**
2. **La pyramide**
3. **Le diamant**



$$23 - 36 + 15 = 2$$

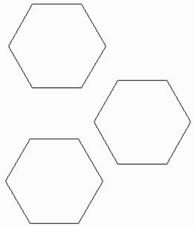
Essayons de construire un polyèdre convexe avec des hexagones :

- soit F le nombre de faces **hexagonales**

Les hexagones

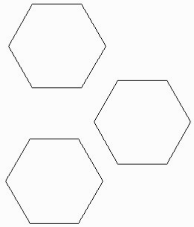
Essayons de construire un polyèdre convexe avec des hexagones :

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- alors $\underbrace{\boxed{2A = 6F}}_{\text{nombre total d'arêtes}}$ et $\underbrace{\boxed{3S = 6F}}_{\text{nombre total de sommets}}$



Essayons de construire un polyèdre convexe avec des hexagones :

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- alors $\underbrace{\boxed{2A = 6F}}_{\text{nombre total d'arêtes}}$ et $\underbrace{\boxed{3S = 6F}}_{\text{nombre total de sommets}}$



- donc

$$F - A + S = F - 3F + 2F = 0 \quad \neq 2$$

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**

HEXAGONES ET PENTAGONES

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$
- donc

$$(F+P)-A+S = F+P-\frac{6F+5P}{2}+\frac{6F+5P}{3} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P = 12}$$

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc ***12 pentagones****, mais combien d'hexagones ?*

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc **12 pentagones***, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone

HEXAGONES ET PENTAGONES

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc **12 pentagones***, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone
  - ▷ **ou** 1 hexagone et 2 pentagones

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc **12 pentagones***, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone
  - ▷ **ou** 1 hexagone et 2 pentagones
  - ▷ **ou** 3 pentagones

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc **12 pentagones***, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone $\checkmark$

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

Donc **12 pentagones***, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone $\checkmark$

On ne colle jamais 2 pentagones en un sommet !
Donc nombre de sommets = tous ceux des 12 pentagones

Hexagones et pentagones

Ajoutons des pentagones !

- soit F le nombre de faces **hexagonales**
- soit P le nombre de faces **pentagonales**
- alors $\boxed{2A = 6F + 5P}$ et $\boxed{3S = 6F + 5P}$

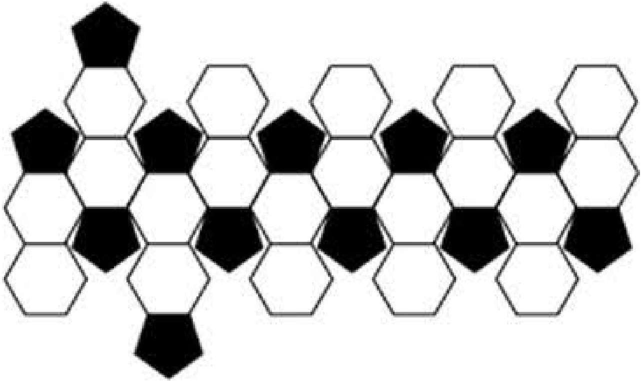
Donc ***12 pentagones****, mais combien d'hexagones ?*

- on doit recoller en **chaque sommet** :
  - ▷ 2 hexagones et 1 pentagone $\checkmark$

On ne colle jamais 2 pentagones en un sommet !
Donc nombre de sommets = tous ceux des 12 pentagones

$$\boxed{S = 60 \quad \text{et} \quad F = 20}$$

Le patron !

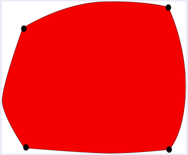


12 pentagones + 20 hexagones = 1 ballon

Théorème de Alexandrov-Pogorelov ($\sim$ 1950)

Prenons 6 faces convexes telles que

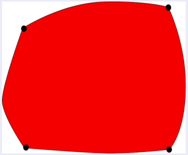
- chaque face possède 4 points appelés sommets



Théorème de Alexandrov-Pogorelov ($\sim$ 1950)

Prenons 6 faces convexes telles que

- chaque face possède 4 points appelés sommets

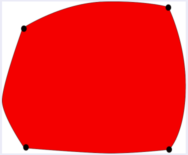


- les 4 arêtes de chaque face ont toutes mêmes longueur

Théorème de Alexandrov-Pogorelov ($\sim$ 1950)

Prenons 6 faces convexes telles que

- chaque face possède 4 points appelés sommets

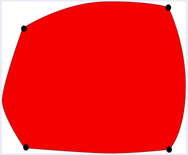


- les 4 arêtes de chaque face ont toutes mêmes longueur
- lorsque l'on colle 3 faces différentes en un sommet, la somme des trois angles correspondants est inférieure à 360 degrés

Théorème de Alexandrov-Pogorelov ($\sim$ 1950)

Prenons 6 faces convexes telles que

- chaque face possède 4 points appelés sommets



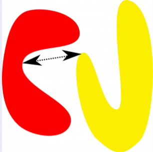
- les 4 arêtes de chaque face ont toutes mêmes longueur
- lorsque l'on colle 3 faces différentes en un sommet, la somme des trois angles correspondants est inférieure à 360 degrés

Alors : on peut recoller les 6 faces
et fabriquer un **objet convexe** sans rien déchirer !

Théorème de Alexandrov-Pogorelov ($\sim$ 1950)

Prenons 6 faces ~~convexes~~ telles que

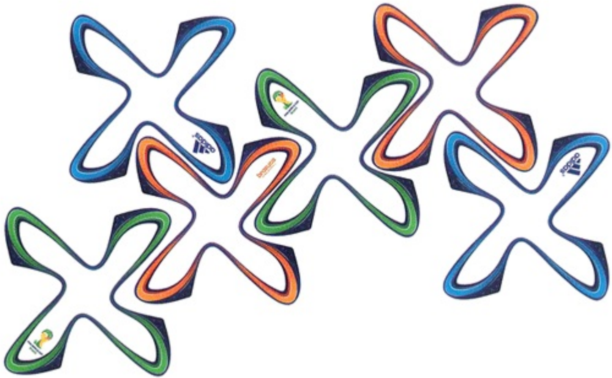
- chaque face possède 4 points appelés sommets



- les 4 arêtes de chaque face ont toutes mêmes longueur
- lorsque l'on colle 3 faces différentes en un sommet, la somme des trois angles correspondants est inférieure à 360 degrés

Alors : on peut recoller les 6 faces
et fabriquer un **objet convexe** sans rien déchirer !

Prenons 6 faces...



Point noir = sommet !

Et assemblons !

ET ASSEMBLONS !

- ▷ Video de la fabrication du ballon

La controverse Jabulani (2010)

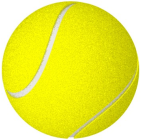
Le ballon trop parfait

- article de J. Bush (MIT, Cambridge USA)

  In modern times, when it is entirely possible to produce a perfectly smooth ball, manufacturers choose not to do so for an obvious reason: the ball would, over a greater range of parameters, bend the wrong way.

  *(*The aerodynamics of the beautiful game*, 2013, publié aux Éditions de l'École Polytechnique)*

- **Le tennis et le baseball**

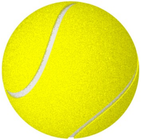


Théorème de la balle de tennis (Arnold, 1994)

Toute courbe lisse autre qu'un cercle partageant la sphère en deux parties isométriques a au moins 4 points d'inflexion.

ET LES AUTRES ?

- **Le tennis et le baseball**



Théorème de la balle de tennis (Arnold, 1994)

Toute courbe lisse autre qu'un cercle partageant la sphère en deux parties isométriques a au moins 4 points d'inflexion.

▷ article de R. Thompson (Arizona)

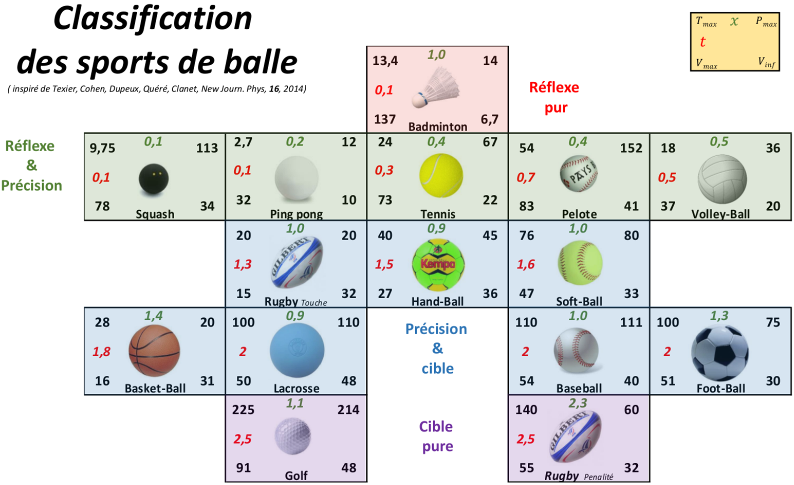
> *Problems in design, even those of a rather frivolous nature, can produce some very interesting mathematics.*
>
> *(*DESIGNING A BASEBALL COVER*, 1998)*

Et les autres ?

- **Le rugby** : video conference de J. Pérez (ENSTA ParisTech)

ET LES AUTRES ?

- **Le rugby** : video conference de J. Pérez (ENSTA ParisTech)



Les références à consulter

1. **Images des mathématiques :** `http://images.math.cnrs.fr/`
   - *Le Brazuca, le ballon cubique de la Coupe du monde*
   - *Le ballond rond*
   - *La balle et la courbe*

2. Les images ont été prises dans :

   `http://coupedumonde2014.net/mondial/historique/ballons-fifa-coupe-du-monde.php`

   `http://tpe-ballondefootball.jimdo.com/`

   `http://www.apprendre-en-ligne.net/blog/index.php/2006/06/10/284-ballon-de-foot`

   `http://www.carionmineraux.com/mineraux_juillet_aout_08_p1.html`

   `http://www.familiscope.fr/activites-enfants/j-apprends-a-dessiner/`

3. Un peu de **détente mathématique**
   - Le film Dimensions et la suite du film Chaos [Leys, Ghys, Alvarez]
   - La chaîne Youtube Institut Henri Poincaré