

Mathématiques pour l'ingénieur 1

M. Simon

ESTP Paris Campus de Dijon
2021/2022

Contents

1	Intégrale de Lebesgue, Espaces \mathbb{L}^p	7
1.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann	7
1.2	Définition succincte de l'intégrale de Lebesgue	9
1.3	Lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue	10
1.4	Théorèmes de Lebesgue	13
1.4.1	Convergence monotone	13
1.4.2	Lemme de Fatou	13
1.4.3	Convergence dominée	14
1.4.4	Fonctions définies par des intégrales	14
1.4.5	Théorème de Fubini	15
1.5	Espaces \mathbb{L}^p	16
2	Convolution, Fourier et Laplace	19
2.1	La convolution	19
2.1.1	Convolution de deux fonctions	20
2.1.2	Propriétés du produit de convolution	20
2.2	La transformation de Fourier	21
2.2.1	Transformée de Fourier des fonctions	21
2.2.2	Inversion et premières propriétés	22
2.2.3	Dérivation	23
2.2.4	Transformée de Fourier et convolution	23
2.2.5	Formule de Parseval-Plancherel	24

2.2.6	Table des transformées de Fourier usuelles	24
2.3	Transformée de Laplace	25
2.3.1	Définition et existence	25
2.3.2	Lien entre transformées de Fourier et de Laplace	26
2.3.3	Table des transformées de Laplace usuelles	27
3	Introduction aux distributions	29
3.1	Pourquoi les distributions ?	29
3.2	Définition des distributions	32
3.2.1	Les fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$	32
3.2.2	Les distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$	33
3.2.3	Exemples de distributions associées à des fonctions	34
3.2.4	Distributions qui ne sont pas des fonctions	35
3.3	Propriétés des distributions	36
3.3.1	Opérations élémentaires sur les distributions	36
3.3.2	Limite d'une suite de distributions	37
3.3.3	Dérivation des distributions	37
3.3.4	Multiplication de distributions	39
3.4	Convolution, transformées de Fourier et de Laplace	39
3.4.1	Convolution de deux distributions	39
3.4.2	Transformée de Fourier des distributions	41
3.4.3	Propriétés de la transformée des distributions	43
3.4.4	Un exemple : le peigne de Dirac	44
3.4.5	Table des transformées de Fourier usuelles	45
3.4.6	Transformée de Laplace des distributions	45
4	Fonctions spéciales	47
4.1	Les fonctions eulériennes	47
4.1.1	La fonction Gamma	47
4.1.2	La fonction Bêta	48

<i>CONTENTS</i>	5
4.2 Les polynômes orthogonaux	48
4.2.1 Polynômes de Legendre	49
4.2.2 Polynômes de Hermite	49
4.2.3 Polynômes de Laguerre	50
4.3 Les fonctions de Bessel	50
5 Équations aux dérivées partielles	53
5.1 Généralités	53
5.2 Équations du premier ordre	55
5.2.1 Un exemple : les équations de transport	55
5.2.2 Équations à coefficients variables	56
5.3 Équation des ondes sur un axe	58
5.4 Équation de Laplace	59
5.5 Application de la convolution	63
5.5.1 Détermination de la réponse impulsionnelle	63
5.5.2 Convolution	64
5.5.3 Retour au problème initial	65
5.5.4 Récapitulatif	66
A Intégrabilité au sens de Lebesgue	69
A.1 Ensemble élémentaire et ensemble mesurable	69
A.2 Mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable	71
A.3 Fonctions mesurables	72
A.4 Intégrale de Lebesgue	73
A.4.1 Fonctions étagées	73
A.4.2 Intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable	74

Chapter 1

Intégrale de Lebesgue, Espaces \mathbb{L}^p

Nous donnons ici une présentation simplifiée de la *théorie de l'intégrale de Lebesgue*, dont l'objectif est d'étendre les notions de *mesure* et d'*intégrale* à tout ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$, borné ou non-borné (contrairement à l'intégrale de Riemann qui nécessite de se placer sur un produit d'intervalles).

Rappels : un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur une partie de \mathbb{N} (ou \mathbb{N} tout entier). Par exemple, les rationnels de $[0, 1]$ forment un ensemble dénombrable, les irrationnels de $[0, 1]$ forment un ensemble indénombrable. On dit qu'un ensemble E est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

On fait un bref rappel sur l'intégrale de Riemann en dimension 1. Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fini. Soit x_1, \dots, x_n un ensemble fini de points de $[a, b]$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$$

On considère alors un ensemble de points $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}$ tels que

$$x_{k-1} < \zeta_k < x_k \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n+1$$

On définit la *somme de Riemann*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Et la construction de l'intégrale de f sur $[a, b]$ se fait de la manière suivante :

DÉFINITION 1.1. Si, lorsque $n \rightarrow \infty$ de manière à ce que $|x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$, la somme S_n tend vers une limite indépendante du choix des x_k et des ζ_k , alors cette limite est appelée intégrale de f au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$ et est notée

$$\int_a^b f(x)dx$$

On peut alors montrer que toute fonction *continue* sur $[a, b]$ (ou même seulement bornée, et continue sauf en un nombre fini de points) est intégrable au sens de Riemann, ainsi que toute fonction monotone (ou même seulement monotone par morceaux).

Avec la notion d'intégrabilité au sens de Riemann on peut

1. **passer à la limite sous l'intégrale** de la façon suivante : on suppose

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f sont des fonctions définies sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}
- la suite (f_n) converge *uniformément* vers f sur $[a, b]$, i.e.

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

2. **primitiver** : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, soit $a \in I$ et soit F l'application définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors, si f est continue sur I , F est dérivable sur I et sa dérivée est $F' = f$.

3. **définir des intégrales impropres**, par exemple si

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x)dx < \infty$$

on dit que l'intégrale est *semi-convergente*. On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est une *intégrale impropre*.

Quelques problèmes avec l'intégrale de Riemann :

1. Certaines fonctions sont trop irrégulières pour être intégrables au sens de Riemann, par exemple: la fonction $f(x)$ qui vaut 0 si $x \in \mathbb{Q}$ et 1 si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. L'intégrale de la limite f d'une suite de fonctions f_n peut être différente de la limite des intégrales, par exemple : $f_n(x) = 2^n$ si $x \in]2^{-n}, 2^{-n+1}[$ et 0 ailleurs.
3. Si on considère l'espace des fonctions f dont la norme $\|f\|_{\mathcal{R}} := \int |f|$ (au sens de Riemann) est finie, alors cet espace n'est pas complet (une suite de Cauchy n'y converge pas toujours). Par exemple, la suite $f_n(x) = \exp((i - \frac{1}{n})x)$.

◇ DANS L'APPENDICE A, ON DÉFINIT RIGOREUSEMENT UNE NOUVELLE NOTION D'INTÉGRABILITÉ, PLUS PUISSANTE QUE L'INTÉGRABILITÉ AU SENS DE RIEMANN. À PARTIR DE MAINTENANT, QUAND ON DIRA QUE “ f EST INTÉGRABLE”, ON SOUS-ENTENDRA “AU SENS DE LEBESGUE”. ON COMMENCE ICI PAR DONNER TRÈS RAPIDEMENT LES DÉFINITIONS ESSENTIELLES (QUI SONT DÉTAILLÉES EN APPENDICE), PUIS NOUS FERONS LE LIEN ENTRE LES DEUX NOTIONS (RIEMANN-INTÉGRABLE ET LEBESGUE-INTÉGRABLE). ENFIN, ON DONNERA LES NOUVEAUX OUTILS QUE L'ON PEUT DÉSORMAIS UTILISER. ◇

1.2 Définition succincte de l'intégrale de Lebesgue

Considérons d'abord une fonction f continue et positive. Au lieu de couper en tranches verticales l'aire sous la courbe de f (comme pour Riemann), on effectue une découpe *horizontale* : soient $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N$ une subdivision des *valeurs* prises par une fonction positive $f(x)$, et on suppose connue une *mesure* $\mu(A_k)$ de l'ensemble

$$A_k = \{x ; \alpha_k \leq f(x) < \alpha_{k+1}\}.$$

On définit la somme de Lebesgue

$$\Sigma_N(\alpha) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu(A_k) \alpha_{k+1}$$

Si, quand la subdivision devient de plus en plus fine, la somme de Lebesgue $\Sigma_N(\alpha)$ a une limite indépendante de la subdivision α , alors cette limite définit

l'intégrale de Lebesgue notée $\int f$ et la fonction f est dite intégrable (au sens de Lebesgue). On renvoie à l'Appendice A pour plus de détails sur cette mesure μ .

Une notion nouvelle et importante est la suivante (que l'on a simplifié ici, mais que l'on peut retrouver en appendice) : on dit que deux fonctions f et g sont *égales presque partout* et on note $f = g$ si $f(t) = g(t)$ pour tout t sauf sur un ensemble dénombrable de valeurs de t (ensemble de mesure nulle). Dans ce cas, leurs intégrales sont identiques: $\int f = \int g$. Autrement dit, on ne change pas la valeur d'une intégrale si on change un *nombre fini* de valeurs prises par la fonction qu'on intègre.

1.3 Lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue

DÉFINITION 1.2 (Fonctions Lebesgue intégrables). *On dit qu'une fonction f (à valeurs réelles ou complexes), définie sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}$, est Lebesgue intégrable sur E si*

$$\int_E |f| \quad \text{existe au sens de Lebesgue et est finie.}$$

On note $\mathbb{L}^1(E)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur E :

$$\mathbb{L}^1(E) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} ; \int_E |f| < \infty \right\}$$

dans lequel on identifie les fonctions égales presque partout.

Dans ce paragraphe, pour simplifier l'exposition nous nous plaçons sur \mathbb{R} . On considère d'abord l'intégrale de Riemann sur un intervalle borné, puis on examinera les intégrales impropres.

PROPOSITION 1.3. *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle borné $[a, b]$. Si f est intégrable au sens de Riemann, alors f est Lebesgue intégrable et les deux intégrales sont égales :*

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x) dx}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann}}$$

Pour les intégrales impropres, on étudie le cas d'une fonction bornée sur un intervalle infini. Le cas d'une fonction non bornée sur un intervalle fini se traite exactement de la même façon.

PROPOSITION 1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$ Soit f une fonction continue sur tout intervalle fermé $[a, M] \subset \mathbb{R}$, avec $M > a$.

1. Si l'intégrale impropre de Riemann $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente (i.e. la limite de $\int_a^M |f(x)|dx$ est finie lorsque $M \rightarrow \infty$), alors la fonction f est intégrable au sens de Lebesgue sur $\{x \in \mathbb{R} ; x \geq a\}$ et on a

$$\underbrace{\int_{[a, +\infty)} f(x)dx}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)dx}_{\text{Riemann}}$$

2. Si l'intégrale impropre de Riemann $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'est que semi-convergente, alors la fonction f n'est pas Lebesgue intégrable sur E .

EXEMPLE 1.5 (Une fonction Lebesgue intégrable qui n'est pas Riemann intégrable). Soit f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ (fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels). La mesure de \mathbb{Q} est nulle, et donc la mesure de $\mathbb{Q} \cap]0, 1[\subset \mathbb{Q}$ est nulle également. Ainsi on a $f = 0$ p.p. sur $]0, 1[$. On en déduit

$$\int_{]0, 1[} f(x)dx = 0 \quad (\text{au sens de Lebesgue})$$

mais f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

EXEMPLE 1.6 (Une fonction impropre qui n'est pas Lebesgue intégrable). Montrons que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

est convergente au sens de Riemann, mais pas absolument convergente au sens de Riemann sur $[0, +\infty[$.

Par intégration par parties

$$\int_0^M \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^M + \int_0^M \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos M}{M} + \int_0^M \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

On a :

- $(\cos M - 1)/M \rightarrow 0$ lorsque $M \rightarrow \infty$
- la fonction $x \mapsto (1 - \cos x)/x^2$ est continue en 0 et est bornée par $2/x^2$ qui est intégrable en $+\infty$.

Donc

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{existe}$$

Par contre, elle n'est pas absolument convergente car

$$|\sin t| \geq \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

et donc, pour tout $M \geq 1$,

$$\int_1^M \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \int_1^M \frac{1}{2t} dt - \int_1^M \frac{\cos(2t)}{2t} dt$$

La première intégrale diverge lorsque $M \rightarrow \infty$ et la deuxième admet une limite finie lorsque $M \rightarrow \infty$. En effet, pour le voir on peut refaire, de la même façon que précédemment, une intégration par parties pour faire apparaître une intégrale convergente en $1/t^2$.

Elle n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue.

On termine par la liste de fonctions classiques à **connaître** :

- la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty)$
- pour tout $M > 0$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \text{ est intégrable sur } [M, +\infty) \text{ si et seulement si } \alpha > 1$$

autrement dit

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

- pour tout $A > 0$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \text{ est intégrable sur } (0, A) \text{ ssi } \alpha < 1$$

- pour tout $M > 1$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \text{ est intégrable sur } [M, +\infty) \text{ ssi } \alpha > 1 \text{ OU } \alpha = 1, \beta > 1$$

- pour tout $A > 0$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \text{ est intégrable sur } (0, A) \text{ ssi } \alpha < 1 \text{ OU } \alpha = 1, \beta > 1$$

1.4 Théorèmes de Lebesgue

Nous donnons maintenant les résultats fondamentaux qui montrent la puissance de cette nouvelle définition de l'intégrale. En pratique, toutes les fonctions que vous rencontrerez sont des fonctions dites "mesurables". Elles ne sont pas toutes intégrables, mais pour en trouver, on a la proposition (très utile en pratique !) suivante :

PROPOSITION 1.7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq g(x)$, alors $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 1.8. Par comparaison, la fonction $x \mapsto e^{-x}/\sqrt{x}$ est intégrable sur $[0, +\infty)$. De même la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$.

1.4.1 Convergence monotone

THÉORÈME 1.9 (Convergence monotone). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et positives sur E telles que

$$0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad (\text{la suite est croissante})$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f, \quad \text{où } f(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

1.4.2 Lemme de Fatou

Ce deuxième résultat est une conséquence du premier :

LEMME 1.10 (Lemme de Fatou). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et positives sur E (pas forcément croissante). On note

$$f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq n} f_i(x) \right).$$

Alors

$$\int_E f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$$

Autrement dit, dans un cas plus général, même si on ne connaît pas la valeur limite des intégrales $\int_E f_n$, on peut quand même les borner par en-dessous.

1.4.3 Convergence dominée

Ce troisième résultat est le résultat central de la théorie de Lebesgue. Tous les théorèmes de *passage à la limite* en découleront.

THÉORÈME 1.11 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions Lebesgue intégrables, i.e. pour tout n , $f_n \in \mathbb{L}^1(E)$. On suppose que*

1. (Convergence presque partout) $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ p.p. sur E .
Autrement dit, l'ensemble des $x \in E$ tel que la convergence $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ne soit pas vraie, est de mesure nulle.
2. (Domination) De plus, il existe $g \in \mathbb{L}^1(E)$ tel que :

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{p.p. sur } E$$

Alors, d'une part $f \in \mathbb{L}^1(E)$ (f est Lebesgue intégrable) et de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

L'avantage de ce résultat par rapport à la théorie classique de Riemann, c'est que son énoncé est valable pour tout type de domaine E pourvu qu'il soit mesurable. Son application est de plus aisée car il ne demande qu'une domination.

1.4.4 Fonctions définies par des intégrales

Soit $f(x, t)$ une fonction définie sur le produit cartésien $E \times \mathcal{O}$ où E est un ensemble mesurable et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert de \mathbb{R} . Considérons la fonction définie sur \mathcal{O} par une intégrale :

$$t \in \mathcal{O} \mapsto \int_E f(x, t) dx$$

Les théorèmes suivants concernent la continuité et la dérivabilité de la fonction ainsi définie :

THÉORÈME 1.12 (Continuité sous le signe intégral). *Si on suppose*

1. pour tout $t \in \mathcal{O}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;

2. pour presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue en un point $t_0 \in \mathcal{O}$;
3. il existe $g \in \mathbb{L}^1(E)$ telle que : pour tout $t \in \mathcal{O}$

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{p.p. sur } E ;$$

alors la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est Lebesgue intégrable sur E (pour tout $t \in \mathcal{O}$ fixé) et la fonction

$$t \mapsto \int_E f(x, t) dx$$

est continue au point t_0 .

THÉORÈME 1.13 (Dérivation sous le signe intégral). *Si on suppose*

1. pour tout $t \in \mathcal{O}$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est Lebesgue intégrable sur E ;
2. pour presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur \mathcal{O} ;
3. il existe $g \in \mathbb{L}^1(E)$ telle que : pour tout $t \in \mathcal{O}$

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq g(x) \quad \text{p.p. sur } E ;$$

alors la fonction

$$t \mapsto \int_E f(x, t) dx$$

est dérivable sur \mathcal{O} et de plus, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est Lebesgue intégrable sur E et on a

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x, t) dx = \int_E \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

1.4.5 Théorème de Fubini

Ce dernier résultat permet d'échanger l'ordre d'intégration sur deux parties mesurables $\Omega_x \subset \mathbb{R}^p$ et $\Omega_y \subset \mathbb{R}^m$.

THÉORÈME 1.14 (Théorème de Fubini). *Soit f une fonction mesurable dans le domaine $\Omega_x \times \Omega_y$ telle que f soit positive et $f < +\infty$. Alors les deux fonctions φ et ψ définies par*

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_y} f(x, y) dy \quad \psi(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dx$$

(ces deux intégrales ont un sens car f est positive) sont mesurables et de plus

$$\int_{\Omega_x} \varphi(x) dx = \int_{\Omega_y} \psi(y) dy = \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} f(x, y) dx dy$$

1.5 Espaces \mathbb{L}^p

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Grâce à la nouvelle notion d'intégrabilité, dans $\mathbb{L}^1(E)$, l'application $f \mapsto \int_E |f|$ est une norme. On la note

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1} = \int_E |f|$$

Cet espace normé a de bonnes propriétés :

THÉORÈME 1.15. *Muni de sa norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1}$, l'espace $\mathbb{L}^1(E)$ est complet. C'est donc un espace de Banach.*

En physique, d'autres espaces fonctionnels sont particulièrement importants : c'est le cas de celui des fonctions de carré intégrable, c'est-à-dire telles que

$$\mathbb{L}^2(E) := \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} ; \int_E |f|^2 < +\infty \right\}$$

L'espace $\mathbb{L}^2(E)$ est plus riche : on peut le munir d'un *produit scalaire* défini par

$$\langle f, g \rangle := \int_E f g$$

et ce produit scalaire induit une norme

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2} := \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}$$

Cet espace a aussi de bonnes propriétés :

THÉORÈME 1.16. *Muni de son produit scalaire induisant la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2}$, l'espace $\mathbb{L}^2(E)$ est complet. C'est donc un espace de Hilbert.*

Comme pour tout produit scalaire, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

PROPOSITION 1.17 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). *Pour tout $f, g \in \mathbb{L}^2(E)$*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2} \|g\|_{\mathbb{L}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \int_E f g \right| \leq \int_E |f|^2 \int_E |g|^2$$

Enfin, de manière générale, on peut définir, quelque soit $p \in [1, +\infty[$, l'espace

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{E}) = \{f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} ; |f|^p \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})\}$$

qui est muni de sa norme naturelle

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} := \left(\int_{\mathbb{E}} |f|^p \right)^{1/p}$$

Dans les chapitres suivants, on utilisera très souvent le cas $p = 2$, qui est au centre de la théorie des distributions.

On généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

THÉORÈME 1.18 (Inégalité de Hölder). *Soient $p \in (1, +\infty)$ et soit q son conjugué, c'est-à-dire qu'il vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et soit $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Alors $fg \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

autrement dit $\|fg\|_{\mathbb{L}^1} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \|g\|_{\mathbb{L}^q}$.

On termine par les différentes notions de convergence que l'on peut avoir à manipuler pour des fonctions :

DÉFINITION 1.19. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur \mathbb{E} à valeurs réelles.*

1. (Convergence simple) *On dit que (f_n) converge simplement vers f si :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{E}, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$$

2. (Convergence uniforme) *On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{E} si :*

$$\sup_{x \in \mathbb{E}} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

3. (Convergence dans \mathbb{L}^p) *Soit $p \in [1, +\infty)$. On dit que (f_n) converge vers f dans l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{E})$ qui est normé si :*

$$\|f_n - f\|_{\mathbb{L}^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{E}} |f_n - f|^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Chapter 2

Convolution, analyse de Fourier et transformation de Laplace

◇ TOUS LES ENCADRÉS VIOLET SONT À CHERCHER POUR LE FOAD ◇

2.1 La convolution

Le produit de convolution est d'une grande importance en physique, on le retrouve lorsque l'on étudie : la transmission d'un signal, une impulsion, etc.

EXEMPLE 2.1 (Le photocopieur). Considérons une machine photocopieuse qui n'est pas parfaitement calibrée : un trait fin en position x_1 donne sur la photocopie un trait étalé centré en x_1 . Cet étalement est une fonction caractéristique de l'appareil que nous appelons fonction d'étalement, et que nous notons $h(x)$. Pour un unique trait placé en x_1 et d'une intensité f_1 , la photocopie donne donc $f_1 h(x - x_1)$. Si n traits placés en x_1, \dots, x_n et d'intensités respectives f_1, \dots, f_n sont présents sur l'original, la photocopie sera constituée de la superposition de n traits étalés. La sortie sera donc

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i h(x - x_i)$$

et si le signal d'entrée est une fonction continue de x (à la place d'une fonction discrète composée de n traits), alors on remplace la somme par une intégrale et on obtient

$$S(x) = \int f(u)h(x - u)du$$

C'est le produit de convolution de f et h .

2.1.1 Convolution de deux fonctions

DÉFINITION 2.2. Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ deux fonctions intégrables, à valeurs dans \mathbb{R} (on rappelle la définition 3.7). On définit le produit de convolution h de f et g par :

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et on le note $h = f * g$.

REMARQUE 2.3. Si $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors le produit de convolution $h = f * g$ existe toujours et appartient lui aussi à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On a plus précisément :

$$\|h\|_{\mathbb{L}^1} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} \|g\|_{\mathbb{L}^1}.$$

EXERCICE 2.4. (FOAD)

1. Soit Π la fonction porte définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors montrer que

$$\Pi * \Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

2. Montrer que si f et g sont deux fonctions causales (c'est-à-dire $f(x)$ et $g(x)$ sont nulles si $x < 0$) alors le produit de convolution $f * g$ est causale lui aussi, et on a

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)g(x-t)dt & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1.2 Propriétés du produit de convolution

PROPOSITION 2.5 (Commutativité et distributivité). Soit $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g = g * f$.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et si $f, g_1, g_2 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * (\lambda g_1 + \mu g_2)$ existe, et on a

$$f * (\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda f * g_1 + \mu f * g_2$$

PROPOSITION 2.6 (Convolution de fonctions causales). Soit $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ deux fonctions causales, c'est-à-dire nulles pour $x < 0$. Alors $f * g$ est causale, et pour tout $x \geq 0$ on a

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

2.2 La transformation de Fourier

2.2.1 Transformée de Fourier des fonctions

DÉFINITION 2.7 (Transformée de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle transformée de Fourier de f , si elle existe, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

On écrit symboliquement $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, ou $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x))$.

Sur le plan physique, ξ est une fréquence.

REMARQUE 2.8. L'intégrale définissant la transformée de Fourier n'existe pas toujours, par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ n'admet pas de transformée de Fourier.

THÉORÈME 2.9 (Existence de la transformée de Fourier). Toute fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ possède une transformée de Fourier, qui est continue, bornée, et tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

REMARQUE 2.10. La transformée de Fourier \hat{f} a donc de bonnes propriétés, mais elle n'est pas forcément intégrable ! Il n'est pas toujours facile de le vérifier. Par exemple, si f est de classe C^2 et si f, f', f'' sont toutes les trois intégrables, alors \hat{f} est intégrable.

EXERCICE 2.11. (FOAD) Montrer que la transformée de Fourier de la fonction porte Π (définie ci-dessus) est

$$\hat{\Pi}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

2.2.2 Inversion et premières propriétés

PROPOSITION 2.12 (Inversion de la transformée de Fourier). Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ admettant une transformée de Fourier \hat{f} que l'on suppose elle-même intégrable, donc dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, en tout point x où f est continue, on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Cette transformation est appelée transformation de Fourier inverse. On écrit symboliquement $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$.

De plus, les premières propriétés suivantes sont simples à vérifier :

PROPOSITION 2.13. Soit $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. PARITÉ : Si f est paire, alors \hat{f} est paire, et $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1}(f)$ (si elle existe).
Si f est impaire, alors \hat{f} est impaire, et $\mathcal{F}(f) = -\mathcal{F}^{-1}(f)$ (si elle existe).

2. LINÉARITÉ : $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$

3. TRANSPOSITION : la transformée de Fourier de $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$ est

$$\mathcal{F}(\tilde{f})(\xi) = \hat{f}(-\xi)$$

4. CONJUGAISON : la transformée de Fourier de $\bar{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est

$$\mathcal{F}(\bar{f})(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$$

5. CHANGEMENT D'ÉCHELLE : la transformée de Fourier de $f_a : x \mapsto f(ax)$ est

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

6. TRANSLATION : la transformée de Fourier de $f^a : x \mapsto f(x - a)$ est

$$\mathcal{F}(f^a)(\xi) = e^{-2\pi i \xi a} \hat{f}(\xi)$$

7. MODULATION : la transformée de Fourier de $f_{\xi_0} : x \mapsto e^{2\pi i \xi_0 x} f(x)$ est

$$\mathcal{F}(f_{\xi_0})(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$$

2.2.3 Dérivation

a) Par rapport à x

Supposons $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, dérivable, et à dérivée $f' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ intégrable. Par intégration par parties, on obtient

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi).$$

Plus généralement, si f admet des dérivées intégrables jusqu'à l'ordre m , alors pour tout $k = 0, \dots, m$

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi).$$

De cette formule on obtient (en prenant les modules) :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{|2\pi \xi|^m} \int_{\mathbb{R}} |f^{(m)}(x)| dx$$

autrement dit, plus f est dérivable, et à dérivées sommables, plus \widehat{f} décroît rapidement à l'infini (au moins en $1/|\xi|^m$).

b) Par rapport à ξ

Si la fonction $x \mapsto x^m f(x)$ est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors \widehat{f} possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre m , et pour tout $k = 0, \dots, m$

$$\widehat{f}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^m f(x))$$

(par application du théorème de dérivation sous le signe intégrale, voir le théorème 1.13).

2.2.4 Transformée de Fourier et convolution

Supposons $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On a alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt dx = \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} g(x-t) e^{-2\pi i \xi x} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \times \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \end{aligned}$$

après changement de variable $y = x - t$. Autrement dit

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

THÉORÈME 2.14. *La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit ordinaire des transformées de Fourier des deux fonctions.*

2.2.5 Formule de Parseval-Plancherel

Les deux égalités suivantes, dites *relations de Parseval-Plancherel* sont fondamentales, et très utilisées en analyse de Fourier :

THÉORÈME 2.15. Soient $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

En particulier, lorsque $f = g$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

En physique, si f est une onde ou une vibration, et si la variable x est *temporelle* ($x = t$), alors $\int |f|^2$ peut représenter la puissance (ou l'énergie) totale dans le domaine temporel, et $\int |\widehat{f}|^2$ représente la puissance totale dans le domaine fréquentiel.

REMARQUE 2.16. Il existe des fonctions *non intégrables* mais dont le carré est *intégrable*. Par exemple, la fonction sinus cardinal $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ prolongée par continuité en 0 par la valeur 1). De telles fonctions apparaissent fréquemment en physique (fonction d'onde d'une particule en mécanique quantique, en électricité, ou traitement du signal. Dans ce cas $\int |f|^2$ représente l'énergie totale du signal temporel $t \mapsto f(t)$). Il existe un moyen (que nous ne traiterons pas ici) d'étendre la transformée de Fourier aux fonctions non intégrables mais de carré sommable, de telle façon que la relation de Parseval-Plancherel soit toujours valide.

2.2.6 Table des transformées de Fourier usuelles

	f	$\mathcal{F}(f)$
porte	Π	$\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$
$a > 0$	e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2\xi^2/a}$
$a > 0$	e^{-ax}	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$

2.3 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une sorte de généralisation de la transformation de Fourier, qui permet parfois d'éviter d'utiliser les distributions lorsqu'une fonction n'admet pas de transformée de Fourier.

2.3.1 Définition et existence

DÉFINITION 2.17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . La transformée de Laplace de f , notée $\mathcal{L}(f)(z)$ ou $\mathcal{L}(f(t))(z)$ ou $L(z)$, est donnée, lorsqu'elle existe, par la fonction définie sur \mathbb{C} par : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(f(t))(z) = L(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

REMARQUE 2.18. L'intégrale ci-dessus n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ n'admet pas de transformée de Laplace.

EXERCICE 2.19. (FOAD) Montrer que la fonction H de Heaviside a pour transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(H(t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}, \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

THÉORÈME 2.20 (Existence de la transformée de Laplace). Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a, b] \in \mathbb{R}_+^*$ et vérifiant de plus :

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

où $M > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles. Alors la transformée de Laplace de f existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(z) > \gamma$.

Les conditions de ce théorème suffisent pour la plupart des applications, et elles sont en général faciles à vérifier.

PROPOSITION 2.21. Soit $z = \alpha + i\beta$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors $L(z)$ existe si et seulement si $L(\alpha)$ existe.

De plus, si $L(z_0)$ existe, alors $L(z)$ existe pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)$.

Autrement dit, pour connaître l'existence de $L(z)$, il suffit de regarder ce qui se passe pour la partie réelle de z .

DÉFINITION 2.22 (Abscisse de sommabilité). L'abscisse de sommabilité de f est le réel a tel que $L(z)$ existe pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > a$ et n'existe pas pour $\operatorname{Re}(z) < a$.

Si $L(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors on pose $a = +\infty$.

Si $L(z)$ n'existe pour aucun z , alors on pose $a = -\infty$.

2.3.2 Lien entre transformées de Fourier et de Laplace

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ et supposons que f admette une transformée de Fourier \hat{f} . Alors, sa transformée de Laplace L vérifie

$$L(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi(\frac{\omega}{2\pi})t} dt = \hat{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

La transformée de Laplace peut donc se voir comme une extension de la transformée de Fourier : $L(x + i\omega)$ est la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ prise en $\omega/(2\pi)$.

Soit f une fonction d'abscisse de sommabilité $a \in \mathbb{R}$ et notons L sa transformée de Laplace. Alors, pour tout $x > a$, on a

$$L(x + 2\pi i\xi) = \int_{\mathbb{R}} H(t)f(t)e^{-xt}e^{-2\pi i\xi t} dt = \mathcal{F}(H(t)f(t)e^{-xt})$$

et en appliquant la transformée de Fourier inverse (en supposant qu'elle existe, ce qui est le cas si par exemple L est intégrable au sens de Lebesgue) on obtient, en tout point t où Hf est continue :

$$H(t)f(t)e^{-xt} = \int_{\mathbb{R}} L(x + 2\pi i\xi)e^{2\pi i\xi t} d\xi$$

On obtient alors la formule d'inversion suivante : en tout point t où Hf est continue,

$$H(t)f(t) = \int_{\mathbb{R}} L(x + 2\pi i\xi)e^{(x+2\pi i\xi)t} d\xi, \quad \text{pour tout } x > a.$$

D'autre part, si la transformée de Laplace d'une fonction existe, alors elle est unique :

PROPOSITION 2.23. Si deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ ont la même transformée de Laplace, alors elles sont identiques.

PROPOSITION 2.24. Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} telles que toutes les quantités ci-dessous soient bien définies et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors,

1. LINÉARITÉ : $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$
2. TRANSLATION : la transformée de Laplace de $f^a : t \mapsto f(t - a)$ est

$$\mathcal{L}(f^a)(z) = e^{-za} \mathcal{L}(f)(z)$$

3. DÉRIVATION : $\mathcal{L}(f')(z) = -f(0) + z \mathcal{L}(f)(z)$
4. INTÉGRATION : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right)(z) = z^{-1} \mathcal{L}(f)(z)$
5. CONVOLUTION : $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g)$

2.3.3 Table des transformées de Laplace usuelles

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$
constante	1	$\frac{1}{z}$
puissance	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{z^{n+1}}$
racine	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{z}}$
exponentielle	e^{-at}	$\frac{1}{z+a}$
cosinus	$\cos(\omega t)$	$\frac{z}{z^2 + \omega^2}$
sinus	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$

Chapter 3

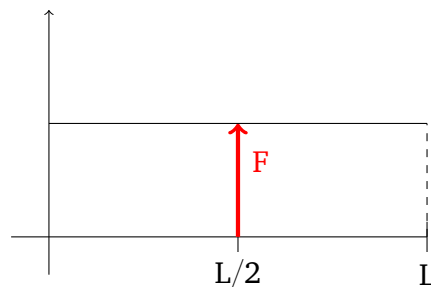
Introduction aux distributions

3.1 Pourquoi les distributions ?

Nous allons commencer par expliquer pourquoi les mathématiciens et physiciens ont ressenti le besoin de définir de nouveaux objets, les *distributions*. Cette innovation extrêmement importante du milieu du XXème siècle a eu un énorme impact en physique, et notamment en mécanique. Cette introduction est inspirée de *Outils Mathématiques pour l'ingénieur 3* écrit par Jérôme Bastien, disponible à l'adresse

<http://utbmj.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/coursOMI3.pdf>

On étudie une poutre de longueur L , fixée à gauche, et soumise en son milieu à une force ponctuelle de norme F et dirigée vers le haut.



Les équations de la physique nous disent que le *moment fléchissant* de la poutre $M(x)$ et l'*effort vertical* subi par la poutre $T(x)$ sont reliés par les équations

suivantes

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0, \quad \text{pour tout } x \in [0, L] \setminus \{L/2\} \quad (3.1)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in [0, L] \quad (3.2)$$

$$T((L/2)^+) - T((L/2)^-) = -F \quad (3.3)$$

D'après (3.1) et (3.3), T est constant sur $[0, L/2[$ et sur $]L/2, L]$, et discontinu en $L/2$. Puisqu'aucune force verticale n'est appliquée à droite, on a $T(L) = 0$, donc T est nul sur $]L/2, L]$. On en déduit d'après (3.3):

$$T(x) = \begin{cases} F & \text{si } x < L/2 \\ 0 & \text{si } x > L/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

On intègre maintenant (3.2) entre 0 et L , et on obtient

$$M(L) - M(0) = \int_0^L -T(x)dx = -FL/2$$

Comme la poutre est attachée à gauche, on a $M(L) = 0$ et ainsi $M(0) = FL/2$. On intègre de nouveau (3.2), cette fois entre 0 et x , et on obtient

$$M(x) = \begin{cases} F(L/2 - x) & \text{si } x \leq L/2 \\ 0 & \text{si } x \geq L/2 \end{cases}$$

On peut supposer sans perte de généralité : $F = 1$ et $L = 1$.

Le mathématicien aimerait écrire des équations valables pour tout $x \in [0, 1]$, et notamment : réécrire (3.1) et définir T sur tout l'intervalle.

Lorsqu'on regarde (3.1), on aimerait dériver la fonction T sur tout $[0, 1]$, mais pas au sens usuel des fonctions, puisque on voit bien sur (3.4) que T est discontinue en $1/2$, et *a fortiori* pas dérivable. On introduit alors la fonction en escalier notée H et appelée *fonction de Heaviside*, définie sur tout \mathbb{R} par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a donc

$$T(x) = 1 - H(x - \frac{1}{2}) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

Peut-on dériver cette fonction ? Heaviside et Dirac ont écrit que la dérivée de la fonction H , non dérivable en 0 puisque discontinue, était une fonction généralisée, notée δ , et qui vérifie donc, *formellement*

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

On remarque que δ ne peut pas être définie en 0. En effet, si $\delta(0)$ avait une valeur, alors $dH(0)/dx$ aussi, ce qui n'est pas le cas. Par contre, on peut écrire,

$$\delta(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{H(h) - H(-h)}{2h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{2h} = +\infty$$

On voit alors que, *formellement*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons aussi que, si u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , nulle en dehors d'un intervalle ouvert $] -A, A[$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0) \quad (3.5)$$

En effet : on écrit, par intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = \int_{-A}^A \delta(x)u(x)dx = \int_{-A}^A \frac{dH}{dx}u(x)dx = - \int_{-A}^A H(x)\frac{du}{dx}dx$$

(puisque u est nulle en $\pm A$). Donc, par définition de H ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = - \int_0^A \frac{du}{dx}dx = -u(A) + u(0) = u(0).$$

Grâce à ces fonctions, on remarque alors que les équations de notre poutre s'écrivent, pour tout $x \in [0, 1]$

$$\frac{dT(x)}{dx} + \delta(x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$T(x) = -H(x - \frac{1}{2}) + 1$$

$$M(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et ces équations sont vraies sur tout l'intervalle, tout en respectant la discontinuité en $\frac{1}{2}$!

3.2 Définition des distributions

Nous allons maintenant introduire le concept de *distributions*, qui généralise la notion de fonctions usuelles et qui englobe la *fonction de Dirac* δ . Cette fonction doit être *dérivable* autant de fois que l'on veut, dans un sens à préciser (puisque sa dérivée doit être la fonction de Heaviside). La grande force des distributions, est justement de rendre la dérivation comme une opération algébrique que l'on peut appliquer autant de fois que l'on veut sur des fonctions dérivables ou généralisées. Dans toute la suite, on étudie des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

3.2.1 Les fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

En physique, on dit parfois : *une grandeur physique f n'est connue que par une mesure physique, ce qui revient donc à prendre la quantité suivante (qui est une moyenne)*

$$\int f(x)\phi(x)dx$$

où la fonction ϕ dépend de l'appareil de mesure. Autrement dit, connaître parfaitement f revient à connaître tous ces nombres, pour tous les appareils de mesure ! Ces fonctions ϕ sont appelées en mathématiques les *fonctions test*. De manière informelle (voir la définition plus rigoureuse ci-après), une distribution f est une application qui, à toute fonction test ϕ , associe un nombre noté $T(\phi)$:

- dans le cas où f est une *vraie fonction*, on la note T_f et elle est définie comme : pour tout ϕ

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx$$

- dans le cas déjà introduit précédemment de la fonction δ de Dirac, ce nombre est : pour tout ϕ

$$\delta(\phi) = \int \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

(d'après le calcul effectué en (3.5))

La première chose à faire est donc de choisir un bon ensemble de fonctions test ϕ :

DÉFINITION 3.1 (Ensemble de fonctions test). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert. On appelle ensemble des fonctions test, noté $\mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω , nulles en dehors d'un intervalle borné, de type $[A, B] \subset \Omega$.

EXEMPLE 3.2. La fonction η définie sur \mathbb{R} par

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

est une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3.2.2 Les distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

DÉFINITION 3.3 (Distribution). Une distribution T sur Ω est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} . On note $T(\phi)$ ou $\langle T, \phi \rangle$ l'image de ϕ par T .

La condition de continuité peut être traduite de la façon suivante : pour tout $K \subset \Omega$ fermé borné, il existe un entier N_K et une constante C_K tels que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui soit nulle en dehors de K , on ait

$$|T(\phi)| \leq C_K \sup_{n \leq N_K} \sup_{x \in \Omega} |\phi^{(n)}(x)| \quad (3.6)$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω .

REMARQUE 3.4. La condition de continuité peut être formulée de manière équivalente par : pour toute suite (ϕ_k) qui converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers ϕ , la suite $(T(\phi_k))$ converge vers $T(\phi)$. Cela paraît plus simple, mais il faut bien définir le sens de "converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ". La définition rigoureuse est la suivante : une suite $\{\phi_k\}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers ϕ si

1. il existe un ensemble borné $B \subset \Omega$ (qui ne dépend pas de k) tel que, pour tout k , ϕ_k soit nulle en dehors de B ;
2. pour tout entier $n \geq 0$, la suite des dérivées $(\phi_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\phi^{(n)}$.

REMARQUE 3.5. La condition de continuité (3.6) sera toujours vérifiée en pratique.

3.2.3 Exemples de distributions associées à des fonctions

L'intégration de Riemann ne suffit plus pour la suite. C'est l'intégrale de Lebesgue qui sera toujours utilisée dans ce chapitre.

DÉFINITION 3.6. Pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on pose

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$$

On vérifie que l'application $\phi \mapsto T(\phi)$ est bien linéaire. De plus, la condition (3.6) est bien vérifiée si f est dans \mathbb{L}^2 d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (Proposition 1.17). En effet : soit ϕ nulle en dehors de K (fermé borné), alors

$$|T_f(\phi)| = \left| \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\phi|^2 \right)^{1/2} \leq C_K \|f\|_{\mathbb{L}^2} \sup_{x \in K} |\phi(x)|$$

On peut en fait étendre cette définition à des fonctions *localement sommables* :

DÉFINITION 3.7. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite localement sommable, et on note $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, si elle est intégrable (au sens de Lebesgue) sur tout intervalle borné. À toute fonction $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ on associe la distribution définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx, \quad \text{que l'on note auss } \langle f, \phi \rangle$$

Cette intégrale est bien définie puisque ϕ est nulle en dehors d'un intervalle borné.

EXEMPLE 3.8. La fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une fonction localement sommable, c'est donc une distribution. On a

$$\langle H, \phi \rangle = T_H(\phi) = \int_0^{+\infty} \phi(x)dx$$

Le résultat suivant nous permet de comprendre pourquoi la notion de distribution généralise bien la notion de fonction :

THÉORÈME 3.9. Soit $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Si $T_{f_1} = T_{f_2}$ alors $f_1 = f_2$ presque partout.

Autrement dit, on peut identifier la distribution T_f à la fonction f , et par abus de notation on notera souvent f à la place de T_f :

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$$

REMARQUE 3.10. Dans \mathbb{L}^2 , les fonctions sont définies “presque partout près” (deux fonctions sont égales si l’ensemble des points où elles ne coïncident pas est de mesure nulle, voir Section A.3). En particulier, on peut changer, sans modifier la distribution, les valeurs de cette fonction sur des ensembles finis de points. Par exemple, pour la fonction de Heaviside H , on n’a pas besoin de définir sa valeur en 0. Parfois, de façon purement conventionnelle, on pose $H(0) = \frac{1}{2}$ mais cela n’a aucune influence sur les calculs !

3.2.4 Distributions qui ne sont pas des fonctions

DÉFINITION 3.11 (Distribution de Dirac). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $a \in \Omega$. On appelle distribution de Dirac en a notée δ_a , la distribution définie par

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$$

On peut montrer que la Dirac δ_a ne provient pas d’une fonction appartenant à $\mathbb{L}^1_{\text{loc}}$, c’est donc bien un nouveau type de distribution.

DÉFINITION 3.12 (Valeur principale). La distribution valeur principale notée $\text{vp}\frac{1}{x}$ est définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

On doit d’abord montrer que la limite existe. C’est en effet le cas, car pour A assez grand et $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x)}{x} dx = - \int_A^{\varepsilon} \frac{\phi(-x)}{-x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$$

On réécrit cette dernière intégrale comme

$$\int_{\varepsilon}^A \psi_{\varepsilon}(x) dx, \quad \text{où } \psi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} & \text{si } x \in [\varepsilon, A] \\ 0 & \text{si } x \in [0, \varepsilon[\end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange en 0, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{1}{2}x^2 \phi''(\theta x), & \theta \in]0, 1[\\ \phi(-x) &= \phi(0) - x\phi'(0) + \frac{1}{2}x^2 \phi''(-\tilde{\theta}x), & \tilde{\theta} \in]0, 1[\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} = 2\phi'(0) + \frac{1}{2}x(\phi''(\theta x) + \phi''(-\tilde{\theta}x))$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0 par la valeur $2\phi'(0)$. On note ψ cette fonction continue sur $[0, A]$. D'autre part, la fonction ψ_ε est bornée indépendamment de ε et tend simplement vers ψ sur $[0, A]$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a, pour tout A fixé

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^A \psi_\varepsilon(x) dx = \int_0^A \psi(x) dx.$$

La limite dans la définition 3.12 existe bien.

On vérifie facilement la linéarité de l'application $\phi \mapsto \langle \text{vp}_x^1, \phi \rangle$, et on peut admettre que la condition de continuité est bien vérifiée. On a ainsi défini une nouvelle distribution, qui ne provient pas d'une fonction localement intégrable.

3.3 Propriétés des distributions

3.3.1 Opérations élémentaires sur les distributions

DÉFINITION 3.13 (Combinaison linéaire de distributions). *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont deux réels et si T_1 et T_2 sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors la combinaison linéaire $\lambda T_1 + \mu T_2$ est la distribution définie de la façon suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,*

$$\langle \lambda T_1 + \mu T_2, \phi \rangle = \lambda \langle T_1, \phi \rangle + \mu \langle T_2, \phi \rangle.$$

De manière générale, pour savoir comment une "opération élémentaire" agit sur les distributions, on peut d'abord étudier comment ces opérations sont définies pour une fonction localement sommable, puis on traduit le résultat obtenu avec le langage des distributions. Par exemple, soit $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La *translatée* f_a de f est la fonction donnée par $f_a(x) = f(x - a)$. La distribution associée à f_a vérifie donc, par changement de variable : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_{f_a}, \phi \rangle = \int f(x - a)\phi(x) dx = \int f(y)\phi(y + a) dy = \langle T_f, \phi_{-a} \rangle$$

On définit donc

DÉFINITION 3.14 (Translatée d'une distribution et distribution périodique). La translatée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, notée T_a , est la distribution définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_a, \phi \rangle = \langle T, \phi_{-a} \rangle$$

On dit que T est périodique de période a si $T_a = T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3.3.2 Limite d'une suite de distributions

Comme les distributions ne sont pas des fonctions, il faut définir une nouvelle notion de convergence, comme suit :

DÉFINITION 3.15 (Convergence au sens des distributions). Soit (T_n) une suite de distributions sur l'ouvert Ω et soit T une distribution sur l'ouvert Ω . On dit que la suite $\{T_n\}$ de distributions converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers T si et seulement si, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite réelle $\{\langle T_n, \phi \rangle\}$ converge vers $\langle T, \phi \rangle$.

LEMME 3.16. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions localement intégrables sur \mathbb{R} .

- Si $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur Ω , alors $\{T_{f_n}\}$ converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- Si $\{f_n\}$ converge vers f dans $L^2(\Omega)$, alors $\{T_{f_n}\}$ converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proof. Pour le premier point il suffit d'écrire

$$|\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) \phi(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\phi|^2 \right)^{1/2} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$$

et pour le deuxième, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) \phi(x) dx \right| \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}$$

□

3.3.3 Dérivation des distributions

En procédant de la même manière que pour les opérations élémentaires, on peut maintenant définir la dérivation :

DÉFINITION 3.17 (Dérivées des distributions). Soit $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ une distribution. La dérivée T' de T est définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

Plus généralement, la dérivée k -ème $T^{(k)}$ de T est définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle$$

EXEMPLE 3.18. La fonction de Heaviside et la distribution de Dirac sont reliées par la relation suivante :

$$H' = \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

En effet :

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) - \lim_{M \rightarrow \infty} \phi(M) = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

Un résultat fondamental est le suivant :

PROPOSITION 3.19 (Formule des sauts). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $a_0 < a_1 < \dots < a_N$ avec a_0 et a_N les deux extrémités de I . Soit f une fonction :

- continument dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$
- ayant en chaque point a_i une limite à droite et une limite à gauche.

On note le saut de f en a_i la quantité $\sigma_{a_i} = f(a_i^+) - f(a_i^-)$. Enfin, on note f' la dérivée usuelle de f sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ (f' n'est pas définie aux points a_i car f est discontinue). Alors, dans $\mathcal{D}'(I)$ on a

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$$

Autrement dit, la dérivée de la distribution associée à f est égale à la distribution associée à f' plus la somme de Dirac aux points de discontinuités de f , pondérés par les valeurs des sauts.

Une conséquence immédiate est la suivante :

COROLLAIRE 3.20. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , nulle sur \mathbb{R}_- et dont la restriction à \mathbb{R}_+ est dans $\mathbb{L}_{\text{loc}}^1$ et possède une dérivée appartenant à $\mathbb{L}_{\text{loc}}^1$. Notons f' la dérivée usuelle de f sur chacun des intervalles \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ . On suppose que f admet une limite à droite en 0, notée $f(0^+)$. Alors, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$(T_f)' = T_{f'} + f(0^+) \delta_0.$$

3.3.4 Multiplication de distributions

Il n'existe aucun moyen de multiplier entre elles deux distributions quelconques. D'autre part, si $f, g \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1$, alors il n'est pas vrai que le produit $f g$ est dans $\mathbb{L}_{\text{loc}}^1$ (prendre par exemple, $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$).

Néanmoins, on peut multiplier une distribution par une fonction indéfiniment dérivable :

DÉFINITION 3.21 (Multiplication par une fonction indéfiniment dérivable). Soit g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la distribution produit gT par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle gT, \phi \rangle = \langle T, g\phi \rangle$$

On admet que cela définit bien une distribution, on remarque néanmoins que $g\phi$ appartient bien à $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc que la définition a un sens.

EXEMPLE 3.22. Si $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1$ alors, le produit de g indéfiniment dérivable et de T_f donne :

$$gT_f = T_{fg}$$

EXEMPLE 3.23. Lorsqu'on multiplie la distribution de Dirac δ_a par g indéfiniment dérivable on obtient :

$$g\delta_a = g(a)\delta_a$$

En effet :

$$\langle g\delta_a, \phi \rangle = \langle \delta_a, g\phi \rangle = [g\phi](a) = g(a)\phi(a) = g(a)\langle \delta_a, \phi \rangle = \langle g(a)\delta_a, \phi \rangle$$

PROPOSITION 3.24 (Dérivation du produit). Soit g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ on a l'égalité

$$(gT)' = g'T + gT'$$

3.4 Convolution, transformées de Fourier et de Laplace

3.4.1 Convolution de deux distributions

On cherche à étendre le produit de convolution de deux fonctions aux distributions. Pour cela, on commence par le cas de distributions associées à deux

fonctions $f, g \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1$ localement sommables. Soit $\phi \in \mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}\langle T_{f * g}, \phi \rangle &= \int (f * g)(t) \phi(t) dt = \int \left(\int f(s) g(t-s) ds \right) dt \\ &= \iint f(x) g(y) \phi(x+y) dx dy\end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle T_{f * g}, \phi \rangle = \langle T_f, h \rangle \quad \text{avec } h : x \mapsto \langle T_g, \phi(x + \cdot) \rangle$$

Pour que $\langle T_f, h \rangle$ soit bien défini, il faut que h appartienne à \mathcal{D} , ce qui n'est pas nécessairement le cas !

On généralise cette définition aux distributions quelconques. Pour cela, on introduit une notation : si $S \in \mathcal{D}'$ alors la notation $S|_y$ signifie que la distribution ne s'applique qu'à la variable y , et pas aux autres variables. Par exemple, l'expression $\langle S|_y, \phi(x+y) \rangle$ est une fonction de x (on considère x fixé, comme un paramètre). On peut aussi la réécrire comme $\langle S, \phi(x + \cdot) \rangle$.

DÉFINITION 3.25. Soient $T, S \in \mathcal{D}'$. On appelle produit de convolution de T et S , noté $T * S$, la distribution définie, si elle existe, par : pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\langle T * S, \phi \rangle = \langle T|_x, \langle S|_y, \phi(x+y) \rangle \rangle$$

Autrement dit, on fait d'abord agir la distribution S sur la fonction test $y \mapsto \phi(y+x)$, quantité qui dépend de x . Puis on fait agir la distribution T sur la fonction test $x \mapsto \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle$, si cette fonction est bien dans \mathcal{D} .

REMARQUE 3.26. Pour que le produit de convolution $T * S$ soit bien une distribution de \mathcal{D}' , il faut aussi vérifier la condition de continuité de la définition 3.3, ce qui est loin d'être évident !

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les produits de convolution évoqués existent tous.

PROPOSITION 3.27. Soit S, T deux distributions telles que $T * S$ existe, alors $S * T$ existe et vérifie $S * T = T * S$.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et si S_1, S_2 sont deux distributions telles que $T * S_1$ et $T * S_2$ existent, alors $T * (\lambda S_1 + \mu S_2)$ existent, et on a

$$T * (\lambda S_1 + \mu S_2) = \lambda T * S_1 + \mu T * S_2$$

Un résultat fondamental est le suivant :

PROPOSITION 3.28. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta_0 * T$ existe, et on a*

$$\delta_0 * T = T$$

Proof. Calculons d'abord, pour x fixé,

$$\langle \delta_0, \phi(\cdot + x) \rangle = [\phi(\cdot + x)]_{y=0} = \phi(x)$$

donc cela définit bien une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et

$$\langle \delta_0 * T, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

□

De même :

PROPOSITION 3.29. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta'_0 * T$ existe, et on a*

$$\delta'_0 * T = T'$$

Proof. On calcule, pour x fixé,

$$\langle \delta'_0, \phi(\cdot + x) \rangle = -\phi'(x)$$

qui est bien une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et donc

$$\langle \delta'_0, \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle = \langle T', \phi \rangle.$$

□

On conclut avec la dernière proposition fondamentale :

PROPOSITION 3.30. *Pour tout couple de distributions (S, T) tel que $S * T$ existe, on a*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'$$

3.4.2 Transformée de Fourier des distributions

Nous allons maintenant définir une transformée de Fourier pour les distributions, qui va nous permettre de l'étendre à des fonctions intervenant très souvent en physique (comme δ_0, H , etc.).

a) Définition

Si l'on essaie tout d'abord de définir la transformée de Fourier pour les distributions associées à des fonctions, on obtient : soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ qui définit une distribution T_f , alors la distribution associée à \hat{f} est donnée par

$$\langle T_{\hat{f}}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \phi(t) dt = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x t} dx \phi(t) dt, \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\langle T_{\hat{f}}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{\phi}(x) dx = \langle T_f, \hat{\phi} \rangle$$

Le problème ici, c'est que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il n'y a aucune raison pour que sa transformée de Fourier $\hat{\phi}$ appartienne à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour obtenir une définition satisfaisante de la transformation de Fourier des distributions, on doit donc se placer sur un espace de fonctions test *plus grand* que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

DÉFINITION 3.31 (Espace de Schwartz). *Une fonction est dite à décroissance rapide si pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^k f(x)| = 0.$$

Une telle fonction décroît plus vite que toutes les puissances de $1/|x|$ à l'infini.

On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} qui sont indéfiniment dérivables, et à décroissance rapide, ainsi que toutes leurs dérivées. Cet espace est appelé espace de Schwartz.

Si $\phi \in \mathcal{S}$, alors d'après ce qui précède, on a : pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\hat{\phi}^{(m)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)^m e^{-2\pi i \xi x} \phi(x) dx$$

et on en déduit que $\hat{\phi}$ ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. D'une manière générale, on a le résultat suivant

THÉORÈME 3.32. *La transformée de Fourier \mathcal{F} est un automorphisme (application linéaire bijective) de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . Son application réciproque est \mathcal{S}^{-1} .*

On peut maintenant définir la transformée de Fourier de certaines distributions.

DÉFINITION 3.33 (Distribution tempérée). *On appelle distribution tempérée toute forme linéaire continue sur l'espace \mathcal{S} . Les distributions tempérées forment un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ noté \mathcal{S}' .*

REMARQUE 3.34. Dans la pratique, la plupart des distributions sont tempérées (δ_a, vp_x^1). L'ensemble des distributions tempérées contient tous les Dirac, les dérivées des Dirac, et les distributions associées aux fonctions à croissance "lente" comme les polynômes ou les fonctions périodiques localement intégrables.

DÉFINITION 3.35 (Transformée de Fourier des distributions tempérées). *Toute distribution tempérée T admet une transformée de Fourier notée $\mathcal{F}(T)$ ou \widehat{T} , qui est également une distribution tempérée. Elle est définie par : pour tout $\phi \in \mathcal{S}$,*

$$\langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle.$$

Par ailleurs, on peut définir facilement la convolution des fonctions d'une distribution tempérée avec une fonction de \mathcal{S} . En effet, si $\phi \in \mathcal{S}$, alors la fonction $y \mapsto \phi(x - y)$ appartient aussi à \mathcal{S} . Par conséquent, pour tout $T \in \mathcal{S}'$, on peut définir la *convolution* $T * \phi$ qui est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle$$

EXEMPLE 3.36 (Convolution avec un Dirac). Soit $\phi \in \mathcal{S}$. On a

$$(\delta_0 * \phi)(x) = \phi(x)$$

3.4.3 Propriétés de la transformée des distributions

On peut définir une transformée de Fourier inverse, comme pour les fonctions, de la façon suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\phi) \rangle$$

Les transformées \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} sont des automorphismes de \mathcal{S}' et sont inverses l'une de l'autre.

On a également les propriétés suivantes (similaires à celles des fonctions) :

PROPOSITION 3.37. *Soit $T \in \mathcal{S}'$ une distribution tempérée et soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que T_a est la translatée de T , définie à la définition 3.14. On a alors*

1. DÉRIVATION : $\mathcal{F}(T^{(m)}) = (2\pi i \xi)^m \mathcal{F}(T)$

2. TRANSLATION :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_a) &= e^{-2\pi i \xi a} \mathcal{F}(T) \\ \mathcal{F}(e^{2\pi i a x} T) &= \mathcal{F}(T)_a\end{aligned}$$

Dans les trois égalités précédentes, on note la multiplication d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable, ce qui est bien défini, voir la définition 3.21.

3. CONVOLUTION : pour tout $\phi \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}(T * \phi) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\phi)$$

3.4.4 Un exemple : le peigne de Dirac

La distribution *peigne de Dirac*, notée III, est définie comme

$$\text{III} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

Rappelons la propriété fondamentale de la distribution de Dirac :

$$\langle \delta_n, \phi \rangle = \phi(n)$$

et ainsi on en déduit

$$\langle \text{III}, \phi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n)$$

Cette distribution joue un rôle très important en physique.

THÉORÈME 3.38. *La distribution peigne de Dirac est une distribution tempérée. Elle admet une transformée de Fourier au sens des distributions, qui est égale à elle-même :*

$$\mathcal{F}(\text{III}) = \text{III}$$

3.4.5 Table des transformées de Fourier usuelles

	f ou T	$\mathcal{F}(f)$
Dirac en 0	δ_0	1 (fonction constante égale à 1)
dérivées de Dirac	$\delta_0^{(k)}$	$(2\pi i \xi)^k$
Dirac en x_0	δ_{x_0}	$e^{-2\pi i \xi x_0}$
valeur principale	$\text{vp} \frac{1}{x}$	$-i\pi \text{sign}(\xi)$
peigne de Dirac	III	III

3.4.6 Transformée de Laplace des distributions

On termine par la définition de la transformée de Laplace pour les distributions.

DÉFINITION 3.39. Soit T une distribution à support dans \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire telle que, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans \mathbb{R}_- on a $\langle T, \phi \rangle = 0$.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tel que la distribution $e^{-\alpha t}T$ soit tempérée (appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$), alors on peut définir la transformée de Laplace de T par l'application

$$\mathcal{L}(T) : z \mapsto \langle T, e^{-zt} \rangle$$

REMARQUE 3.40. La transformée de Laplace d'une distribution n'est pas une distribution, mais une fonction de $z \in \mathbb{C}$.

a) Propriétés

PROPOSITION 3.41. Soit T, S deux distributions telles que toutes les quantités ci-dessous soient bien définies. Alors,

1. CONVOLUTION : $\mathcal{L}(T * S) = \mathcal{L}(T)\mathcal{L}(S)$
2. TRANSLATION : $\mathcal{L}(T_a)(z) = e^{-za} \mathcal{L}(T)(z)$
3. DÉRIVATION DE T : $\mathcal{L}(T')(z) = z\mathcal{L}(T)(z)$
4. DÉRIVATION DE \mathcal{L} : $(\mathcal{L}(T))'(z) = \mathcal{L}(-tT(t))(z)$

b) Table de transformées usuelles

	T	$\mathcal{L}(T)(z)$
Dirac	δ_0	1 (fonction constante égale à 1)
Dirac en a	δ_a	e^{-az}
dérivée de Dirac	δ'_0	z

Chapter 4

Fonctions spéciales

◇ TOUS LES ENCADRÉS VIOLET SONT À CHERCHER POUR LE FOAD ◇

Pour certaines équations différentielles particulières, les solutions présentent des propriétés intéressantes et sont couramment utilisées en physique, traitement du signal, etc. Pour cette raison, on aborde quelques-unes de ces fonctions dans ce chapitre, afin d'apprendre à les reconnaître et à les manipuler.

4.1 Les fonctions eulériennes

4.1.1 La fonction Gamma

La fonction $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

et elle vérifie la propriété de récurrence suivante : pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

On remarque que $\Gamma(1) = 1$ et donc, d'après la formule de récurrence ci-dessus, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a aussi la *formule des compléments* :

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.$$

EXERCICE 4.1. (FOAD) Montrer que cette intégrale $\Gamma(x)$ est bien finie pour tout $x > 0$. En utilisant les relations ci-dessus, calculer $\Gamma(\frac{5}{2})$.

4.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta B est définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Par des changements de variable on peut obtenir d'autres expressions

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

Cette fonction est reliée à la fonction Γ par la relation suivante : si $x > 0$ et $y > 0$,

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

EXERCICE 4.2. (FOAD) Calculer $B(2, -\frac{1}{2})$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

4.2 Les polynômes orthogonaux

Rappel : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et soit $\omega : I \rightarrow]0, +\infty[$ une application (le poids). On considère l'ensemble

$$L^2_\omega(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} ; \int_I |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

Alors sur cet espace, le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\omega := \int_I \overline{f(x)} g(x) \omega(x) dx$$

munit $L^2_\omega(I)$ d'une structure d'espace de Hilbert. Très souvent, on recherche une base de cet espace parmi les polynômes, en effectuant un procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On en donne ici quelques exemples.

À retenir : ces fonctions sont importantes car ce sont des solutions simples (polynomiales) de certaines équations différentielles du second ordre à coefficients non constants, que l'on retrouve dans beaucoup de domaines.

4.2.1 Polynômes de Legendre

Les *polynômes de Legendre* sont orthogonaux pour $I = [-1, 1]$ et $\omega(x) \equiv 1$. Ils sont donnés par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

Ils vérifient quelques propriétés

1. leur *norme* est $\langle P_n, P_n \rangle_1 = 2/(2n + 1)$ et ils sont *orthogonaux* :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

2. la *relation de récurrence*

$$(n + 2)P_{n+2}(x) - (2n + 3)xP_{n+1}(x) + (n + 1)P_n(x) = 0$$

3. l'*équation différentielle*

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n + 1)y(x) = 0$$

EXERCICE 4.3. (FOAD) Montrer que le polynôme de Legendre P_n a la même parité que $(-1)^n$ (il est pair si n est pair, et impair si n est impair). Montrer que

$$P_n(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n (n/2)!} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

4.2.2 Polynômes de Hermite

Les *polynômes de Hermite* sont orthogonaux pour $I = \mathbb{R}$ et $\omega(x) = e^{-x^2}$. Ils sont donnés par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Ils vérifient quelques propriétés

1. leur *norme* est $\langle H_n, H_n \rangle_\omega = 2^n n! \sqrt{\pi}$ et ils sont *orthogonaux* :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m$$

2. la relation de récurrence

$$H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0$$

3. l'équation différentielle

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

4.2.3 Polynômes de Laguerre

Les *polynômes de Laguerre* sont orthogonaux pour $I = [0, +\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$. Ils sont données par

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Ils vérifient quelques propriétés

1. leur norme est $\langle L_n, L_n \rangle_\omega = 1$ et ils sont *orthogonaux* :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = 0, \quad n \neq m$$

2. la relation de récurrence

$$(n+2)L_{n+2}(x) - (x-2n-3)L_{n+1}(x) + (n+1)L_n(x) = 0$$

3. l'équation différentielle

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

4.3 Les fonctions de Bessel

Les *fonctions de Bessel* d'ordre α sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel suivante :

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y(x) = 0, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

On distingue deux cas, en fonction du caractère entier de α :

1. Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, dans ce cas on peut trouver deux solutions linéairement indépendantes, J_α et $J_{-\alpha}$, qui sont définies par

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{2^{2k} k! \Gamma(\alpha + k + 1)}$$

Autrement dit, toute solution de (4.1) est combinaison linéaire de J_α et $J_{-\alpha}$ et s'écrit donc sous la forme

$$y(x) = AJ_\alpha(x) + BJ_{-\alpha}(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Donnons quelques valeurs particulières

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x), \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin(x).$$

2. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, dans ce cas $J_{-n} = (-1)^n J_n$ et J_n, J_{-n} ne sont plus linéairement indépendantes. On obtient une solution linéairement indépendante de J_n en considérant

$$N_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

On peut également représenter les fonctions de Bessel par des intégrales, avec la relation suivante : si $\alpha > -\frac{1}{2}$

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt$$

avec une expression simplifiée si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin(t)) dt$$

On a les relations de récurrence et formules de dérivation suivantes :

$$J_{\alpha+1}(x) + J_{\alpha-1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

$$J'_\alpha(x) = \frac{1}{2} (J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x))$$

EXERCICE 4.4. (FOAD)

Déduire des relations précédentes que

$$\frac{d}{dx} (x^\alpha J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

Chapter 5

Résolution d'équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont fondamentales pour comprendre de nombreux phénomènes du monde réel ainsi que notre technologie. C'est grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de certains paramètres, et obtenir des prévisions, parfois extrêmement précises. Les EDP mettent en jeu des fonctions de *plusieurs variables*, et de relier entre elles : la fonction, ses variables, et ses dérivées partielles.

5.1 Généralités

DÉFINITION 5.1. *Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation entre des variables réelles et les valeurs d'une fonction inconnue f et de ses dérivées partielles. L'ordre d'une EDP est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation. On appelle solution toute fonction définie sur un intervalle ouvert I et vérifiant l'équation.*

Il y a différents types de problèmes, qui dépendent des conditions supplémentaires nécessaires pour modéliser une phénomène physique : on parle de

- *problème de Cauchy* lorsque l'on connaît des conditions initiales ;
- *problème aux limites* lorsque l'on connaît des conditions sur la frontière du domaine que l'on étudie ;

- *problème mixte* lorsque l'on connaît à la fois des conditions initiales, et des conditions aux limites.

EXEMPLE 5.2. Voici quelques exemples d'EDP à deux variables, dont certains modélisent l'évolution au cours du temps de systèmes physiques :

- ÉQUATION DE TRANSPORT :

$$\partial_t f(t, x) + c \partial_x f(t, x) = 0$$

- ÉQUATION D'ONDE DE CHOC :

$$\partial_t f(t, x) + f(t, x) \partial_x f(t, x) = 0$$

- ÉQUATION DE LAPLACE :

$$\partial_{xx}^2 f(x, y) + \partial_{yy}^2 f(x, y) = 0$$

- ÉQUATION DES ONDES OU DES CORDES VIBRANTES

$$\partial_{tt}^2 f(t, x) = \partial_{xx}^2 f(t, x)$$

DÉFINITION 5.3. Une équation aux dérivées partielles est linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue f et à ses dérivées partielles.

Dans le cadre des EDP linéaires, plusieurs notions déjà vues pour les équations différentielles ordinaires ré-apparaissent. Soit (E) une EDP linéaire, que l'on écrit sous la forme

$$\mathcal{L}(f) = g \tag{5.1}$$

où f est la fonction inconnue, g est une fonction donnée sur un domaine Ω et \mathcal{L} est un opérateur. L'équation homogène associée est

$$\mathcal{L}(f) = 0 \tag{5.2}$$

Comme pour les équations différentielles ordinaires, on a : si f est solution de l'équation homogène (5.2) et si g est solution (particulière) de (5.1) alors $f + g$ est solution de (5.1).

EXEMPLE 5.4. On veut trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_{xx}^2 f = 0.$$

Autrement dit : $\partial_x(\partial_x f) = 0$. Posons $g(x, y) = \partial_x f(x, y)$, qui vérifie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x g(x, y) = 0.$$

Pour tout y fixé, l'application $x \mapsto g(x, y)$ doit être une constante, qui dépend donc de y . On a donc

$$g(x, y) = C(y)$$

pour une certaine fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On est ramené au problème suivant : trouver f telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_x f(x, y) = C(y).$$

De la même manière, on a nécessairement

$$f(x, y) = C(y)x + D(y)$$

où $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une certaine fonction. On vérifie *a posteriori* que n'importe quelle fonction f de cette forme vérifie bien l'équation, pourvu qu'elle admette des dérivées partielles.

5.2 Équations du premier ordre

5.2.1 Un exemple : les équations de transport

Considérons un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c . Un polluant est en suspension dans l'eau. On note $u(t, x)$ la concentration de polluant à l'instant t et à l'abscisse x . La fonction u vérifie l'EDP

$$\partial_t u(t, x) + cu(t, x) = 0$$

On va résoudre les EDP de cette forme, ou de manière un peu plus générale, les équations

$$a\partial_t u(t, x) + b\partial_x u(t, x) = 0, \quad (5.3)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec l'un des deux au moins qui est non nul. On cherche toutes les fonctions u définies sur \mathbb{R}^2 de classe C^1 telles que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité (5.3) soit vérifiée. En terme de différentielle, (5.3) se traduit par :

$$du_{(t,x)}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi : si u est solution de (5.3), alors u est constante le long de chaque droite de direction (a, b) .

DÉFINITION 5.5. On appelle caractéristiques de l'équation (5.3) les droites de vecteur directeur (a, b) . Ce sont toutes les droites \mathcal{D}_c d'équation $bt - ax = c$ où c parcourt \mathbb{R} .

Notons maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un réel c associe la valeur de u sur la droite \mathcal{D}_c . Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule droite caractéristique \mathcal{D}_{c_0} qui passe par (t_0, x_0) : c'est celle telle que $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0, x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0)$$

Ce raisonnement est valable pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, donc finalement :

$$u(t, x) = f(bt - ax)$$

On vérifie que toute fonction u de cette forme est bien solution. On a ainsi le résultat suivant

THÉORÈME 5.6. Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient (5.3) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(t, x) = f(bt - ax)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

5.2.2 Équations à coefficients variables

Considérons par exemple l'équation

$$\partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0$$

Si l'on veut appliquer la même méthode que précédemment (appelée *méthode des caractéristiques*), on voit que cette équation se réécrit comme

$$du_{(x,y)}(1, x) = 0$$

Notons $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le *champ de vecteurs* défini par

$$\mathbf{X}(x, y) = (1, x)$$

de telle sorte que l'équation devienne

$$du_{(x,y)}(\mathbf{X}(x, y)) = 0. \tag{5.4}$$

DÉFINITION 5.7. Soit $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur. Une courbe intégrale de \mathbf{X} est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, pour tout $t \in I$

$$\gamma'(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$$

On appelle caractéristiques de l'équation (5.4) les courbes intégrales du champ de vecteurs \mathbf{X} .

Et on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.8. Si u est une solution de l'équation (5.4), alors u est constante le long des courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t)$ du champ \mathbf{X} :

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t))) = 0$$

EXEMPLE 5.9 (Un problème de Cauchy). Essayons de résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0 \\ u(0, y) = \phi(y) \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 donnée. On commence par chercher les courbes caractéristiques de l'équation. Ce sont les courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ du champ de vecteurs $\mathbf{X}(x, y) = (1, x)$. Par définition on a donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

ce qui se résout facilement :

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x_0 \\ y(t) &= \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + y_0 \end{aligned}$$

où l'on a noté (x_0, y_0) le point de γ correspondant à $t = 0$ (qui peut être quelconque).

On veut déterminer la solution du problème de Cauchy. On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) . Cette courbe coupe l'axe des ordonnées ($x = 0$) au point $(x_1, y_1) = (0, y_0 - \frac{x_0^2}{2})$ et l'on sait que

$$u(0, y_1) = u(x_0, y_0) = \phi(y_1)$$

On obtient donc, pour n'importe quel (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2

$$u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2})$$

et il est très simple de vérifier que la fonction

$$u(x, y) = \phi\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

est bien solution de (5.5).

5.3 Équation des ondes sur un axe

L'étude des vibrations d'une corde, d'une membrane, des oscillations électromagnétiques, etc. conduit très souvent à une équation dite *équation des ondes*, qui s'écrit, en dimension 1,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Le changement de variables $X = x + ct$ et $T = x - ct$ ramène cette équation à la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = 0$$

Il est facile de voir, en suivant la méthode de l'exemple 5.4, que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions v qui s'écrivent

$$v(T, X) = f(T) + g(X)$$

où f, g sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R} . Revenant à u , on obtient

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

Rappelons que la solution générale de l'équation de transport associée à $\partial_t + c\partial_x$ est une fonction arbitraire de la variable $x - ct$. On voit ici que la solution est la somme de deux fonctions arbitraires : l'une de la variable $x + ct$ et l'autre de la variable $x - ct$. La première décrit une onde arbitraire se déplaçant vers la gauche à la vitesse c , et la seconde une autre onde arbitraire se déplaçant vers la droite à la vitesse c .

On va maintenant résoudre un problème de Cauchy :

THÉORÈME 5.10 (Formule de d'Alembert). *Soit ϕ, ψ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , ϕ de classe C^2 et ψ de classe C^1 . Alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = \phi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \end{array} \right.$$

admet une unique solution u de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

Autrement dit : l'effet d'une position $\phi(x)$ à l'instant $t = 0$ est une paire d'ondes qui se propagent dans les deux directions à vitesse c . Si l'on a une vitesse $\psi(x)$ à l'instant $t = 0$ on obtient une onde qui s'étale dans les deux directions à une vitesse inférieure ou égale à c . En résumé : la valeur de la solution u au point (t, x) ne dépend que des valeurs de ϕ en $x + ct$ et $x - ct$ et des valeurs de ψ sur l'intervalle $[x - ct, x + ct]$.

On va maintenant parler d'une quantité très importante en physique : l'énergie.

THÉORÈME 5.11 (Conservation de l'énergie). Soit ϕ, ψ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , ϕ de classe C^2 et ψ de classe C^1 . On suppose que ϕ et ψ sont nulles en dehors d'un intervalle borné $[-R, R]$. Soit u l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = \phi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

où τ, ρ sont tous deux positifs. Alors l'énergie de u donnée par

$$\mathcal{E}(t) := \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \quad (5.6)$$

est constante au cours du temps (c'est une fonction constante de t).

REMARQUE 5.12. Dans l'expression de l'énergie (5.6), la première intégrale est la partie *énergie cinétique*. La deuxième est la partie *énergie potentielle*, qui correspond à la tension τ multipliée par l'allongement de la corde élastique.

REMARQUE 5.13. Pour montrer ce résultat, il suffit de dériver $\mathcal{E}(t)$ en appliquant les résultats de dérivation sous l'intégrale, voir Chapitre 1, section 1.4.

5.4 Équation de Laplace

On s'intéresse maintenant à l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = f(x, y)$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ appelé *Laplacien* et f est une fonction continue donnée. Cette équation est très importante en physique : sa solution u est, par exemple, le potentiel électrique engendré dans le plan par la répartition de charges $\rho = \frac{-1}{4\pi}f$. Une fonction u qui vérifie cette équation dans un ouvert Ω est dite *harmonique dans Ω* .

On donne tout d'abord l'expression du Laplacien en coordonnées polaires (voir TD) :

LEMME 5.14. *Soit u une fonction de classe C^2 et soit $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a*

$$\Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

Grâce à ce lemme, on peut déterminer certaines solutions :

a) Les fonctions invariantes par rotation

On cherche d'abord toutes les fonctions harmoniques qui sont invariantes par rotation : on cherche les solutions u de classe C^2 telles que $\Delta u(x, y) = 0$ et pour lesquelles, notant $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = 0 \quad (v \text{ ne dépend pas de } \theta)$$

D'après le lemme ci-dessus on doit avoir

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

et on remarque que cette équation s'écrit aussi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \times \frac{\partial v}{\partial r} \right)(r, \theta) = 0$$

que l'on résout facilement : ses solutions sont

$$v(r, \theta) = C_1 \log(r) + C_2$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

b) La méthode de séparation de variables

On cherche maintenant des solutions $v(r, \theta)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0 \quad (5.7)$$

qui sont à variables séparées, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

pour certaines fonctions R et Θ . Pour ce type de fonctions l'équation (5.7) se ramène à

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0$$

Supposons que R et Θ ne s'annulent jamais. On divise alors l'équation ci-dessus par $R(r)/r^2$ et on obtient

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r , le membre de gauche non plus, et la fonction

$$r \mapsto r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)}$$

est constante. Il existe donc un réel λ tel que

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \end{cases}$$

On cherche les fonction Θ qui sont périodiques de période 2π . Or,

- si $\lambda < 0$ alors les solutions de $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$ sont des combinaisons linéaires d'exponentielles, donc pas périodiques ;
- si $\lambda \geq 0$, alors les solutions de $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$ sont les fonctions

$$\Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

et la condition $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ne peut être satisfaite que lorsque $\lambda = n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On obtient finalement une famille de solutions

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

La deuxième équation sur R s'écrit

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 \quad (5.8)$$

Cette équation porte le nom d'*équation d'Euler*. L'étude des solutions générales est complexe et fait l'objet de la théorie de Fuchs. Ici, on se contentera de chercher des solutions sous la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors une équation sur α qui s'écrit

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0.$$

Si $n \neq 0$ nécessairement $\alpha = \pm n$, et la solution générale s'écrit

$$R(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

Le cas $n = 0$ a déjà été vu dans le paragraphe **a**) : les solutions de (5.8) pour $n = 0$ sont

$$R(r) = C_0 \log r + D_0$$

On récapitule : toutes les fonctions

$$v_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

sont solutions, ainsi que

$$v_0(r, \theta) = C_0 \log r + D_0$$

Si l'on veut que la solution originale u soit de classe C^2 à l'origine, alors on doit éliminer toutes les fonctions qui n'ont pas de limite lorsque $r \rightarrow 0$. Il reste donc les fonctions

$$v_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.5 Application de la convolution à la résolution d'équations différentielles (FOAD)

Nous allons étudier une équation différentielle simple :

$$\begin{aligned} y(t) + ay(t) &= f(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nous allons montrer que sa solution est donnée par la *formule de Duhamel*

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(u) e^{-a(t-u)} du. \quad (5.10)$$

Cette formule peut se retrouver grâce à la *méthode de variation de la constante*, mais nous présentons ici une méthode plus générale qui utilise les distributions et pourra être appliquée dans de très nombreux cas.

La résolution s'effectue en 3 étapes :

5.5.1 Détermination de la réponse impulsionnelle

On cherche d'abord à résoudre (5.9) lorsqu'elle est soumise à une impulsion représentée par un Dirac, autrement dit : on résout (5.9) *au sens des distributions* sur \mathbb{R} , avec un second membre égal à δ_0 , et dont la solution, qui est notée Y , vérifie :

$$(T_Y)' + aT_Y = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (5.11)$$

Ici, nous n'avons pas besoin de préciser la condition initiale. Supposons que la solution Y soit nulle sur \mathbb{R}_-^* et que sa restriction à \mathbb{R}_+^* est dans $\mathbb{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$. En 0 elle peut donc avoir des singularités : on note σ la valeur du *saut en 0*, c'est-à-dire $\sigma = Y(0^+) - Y(0^-) = Y(0^+)$.

EXERCICE 5.15. (FOAD) En utilisant un résultat du cours, montrer que

$$(T_Y)' = T_{Y'} + \sigma \delta_0,$$

puis, en injectant dans l'équation ci-dessus montrer que

$$T_{Y'} + \sigma \delta_0 + aT_Y = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

qui est équivalent à

$$T_{Y'} + (\sigma - 1)\delta_0 + aT_Y = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (5.12)$$

On admet le lemme suivant (qui nous sera très utile par la suite)

LEMME 5.16. *S'il existe $a, A \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ tels que*

$$A\delta_a + T_f = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

alors

$$A = 0 \quad \text{et} \quad f = 0 \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}.$$

Autrement dit, les distributions de Dirac et les distributions associées aux fonctions sont “indépendantes” (leur somme est nulle si et seulement si chacune d’entre elles est nulle).

EXERCICE 5.17. (FOAD) Appliquer ce résultat à (5.12) et en déduire la valeur de σ puis montrer que

$$Y' + aY = 0 \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}.$$

Sur \mathbb{R}_- on avait supposé que Y était nulle, donc la deuxième équation ne nous apprend rien. Par contre, sur \mathbb{R}_+ on a

$$Y' = -aY \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}_+.$$

On sait facilement résoudre cette équation différentielle :

EXERCICE 5.18. (FOAD) En rappelant $Y(0^+) = \sigma$, montrer que

$$Y(t) = e^{-at} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

En résumé, nous avons trouvé une distribution associée à une fonction qui est solution de (5.11) : c’est la distribution associée à Y donnée par

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En physique, cette fonction est appelée *fonction de Green*, c’est-à-dire la réponse impulsionnelle du problème (5.9).

5.5.2 Convolution

On considère maintenant l’équation différentielle avec second membre :

$$X' + aX = F, \quad F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \tag{5.13}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tout d'abord, on cherche une solution particulière. Admettons que le produit de convolution $F * Y$ ait un sens (où Y est la réponse impulsionnelle ci-dessus).

EXERCICE 5.19. (FOAD) Montrer que

$$(F * Y)' + a(F * Y) = F$$

Autrement dit, $X = F * Y$ est une solution particulière de (5.13), à condition qu'elle existe.

On recherche maintenant toutes les solutions. Supposons que X_p soit la solution particulière trouvée, et soit X une solution quelconque de (5.13). Alors $X_p - X$ vérifie

$$(X_p - X)' + a(X_p - X) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Cette fois, le second membre n'est pas un Dirac comme dans (5.11), mais est égal à 0. Dans ce cas, c'est une équation différentielle ordinaire que l'on sait résoudre, et $X_p - X$ est tout simplement la distribution associée à la fonction

$$t \mapsto ce^{-at}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est quelconque (puisqu'il n'y a pas de condition initiale).

En résumé, la solution générale de (5.13) est donnée par

$$X = F * Y + ce^{-at}$$

où Y est la réponse impulsionnelle, et où on a noté par abus de notation ce^{-at} pour la distribution associée. Cette méthode, dite *méthode par convolution* ou *par fonction de Green* est très souvent utilisée.

5.5.3 Retour au problème initial

Pour conclure, il nous faut réécrire le problème initial (5.9) sous la forme (5.13). L'équation (5.9) est écrite sur \mathbb{R}_+ , supposons donc que la solution y soit nulle sur \mathbb{R}_- . On cherche encore la distribution T_y associée à y . En raisonnant exactement de la même façon, et en utilisant le corollaire 3.20, on a

$$(T_y)' = y' + y(0)\delta_0$$

et donc

$$(T_y)' + aT_y = T_{\tilde{f}} + y(0)\delta_0$$

où \tilde{f} est la fonction f que l'on a prolongé sur \mathbb{R} de la façon suivante

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi, T_y est solution de (5.13) avec

$$F = y(0)\delta_0 + T_{\tilde{f}}.$$

EXERCICE 5.20. (FOAD) D'après les calculs précédents, montrer que

$$T_y = y(0)Y + \tilde{f} * Y + ce^{-at}$$

où c est un réel quelconque.

On écrit alors le produit de convolution entre \tilde{f} et Y (qui existe bien si on suppose $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$) et on obtient :

$$y(t) = y_0e^{-at} + \int_0^t f(u)e^{-a(t-u)}du + ce^{-at}$$

et si on impose la condition $y(0) = y_0$, on détermine $c = 0$, ce qui implique

$$y(t) = y_0e^{-at} + \int_0^t f(u)e^{-a(t-u)}du,$$

soit exactement la formule de Duhamel.

5.5.4 Récapitulatif

Soit $a \in \mathbb{R}$ donné.

1. L'équation différentielle suivante, au sens des fonctions

$$\begin{aligned} y(t) + ay(t) &= f(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

admet une solution unique, qui est une fonction, donnée par

$$y(t) = y_0e^{-at} + \int_0^t f(u)e^{-a(t-u)}du, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

La régularité de y dépend de celle de f : par exemple, si f est continue, y est de classe C^1 .

2. L'équation différentielle suivante, *au sens des distributions*

$$Y' + aY = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

(sans condition initiale) admet une solution, qui est une distribution associée à une fonction, donnée par

$$Y(t) = ce^{-at} + \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où c est un réel dans le cas général (dans notre cas précédent on savait que Y était nul en 0^- ce qui impliquait $c = 0$). Cette solution est appelée *réponse impulsionnelle*. La fonction Y est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+)$ et discontinue en 0 .

3. L'équation différentielle suivante, *au sens des distributions*

$$X' + aX = F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

(sans condition initiale) où $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution quelconque, admet une solution, qui est une distribution, donnée par

$$X = F * Y + ce^{-at}$$

où c est un réel dans le cas général. Cette distribution existe si $F * Y$ a un sens. Selon la nature de F , X peut être une distribution associée à une fonction, ou non.

Appendix A

Intégrabilité au sens de Lebesgue

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe plus large de fonctions, dites *mesurables*. Tout d'abord, nous avons besoin d'introduire la notion de *mesure de Lebesgue*.

A.1 Ensemble élémentaire et ensemble mesurable

DÉFINITION A.1 (Pavés de \mathbb{R}^n). *Un pavé P d'un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de E qui peut s'écrire sous la forme de produit d'intervalles réels contenant ou non leurs extrémités, par exemple*

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ou encore

$$P = \{a_1\} \times [a_2, b_2[\times \cdots \times [a_n, b_n[, \quad \text{etc.}$$

les intervalles pouvant être ouverts ou non.

DÉFINITION A.2 (Mesure de Lebesgue d'un pavé). *La mesure de Lebesgue (notée m) d'un intervalle $[a, b]$ (pouvant être ouvert ou fermée) est sa longueur, c'est-à-dire*

$$m([a, b]) = m(]a, b]) = m([a, b[) = m(]a, b[) = |b - a|$$

La mesure de Lebesgue d'un pavé de $E \subset \mathbb{R}^n$ est le produit de la mesure des intervalles le constituant : par exemple

$$m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

En particulier, si l'un des intervalles constituant P est réduit à un point, alors la mesure du pavé est nulle.

Dans la suite, pour simplifier nous parlerons de *mesure* (sans préciser de Lebesgue à chaque fois).

DÉFINITION A.3 (Ensemble élémentaire). *On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est élémentaire s'il est réunion disjointe et au plus dénombrable de pavés.*

Si $A = \bigsqcup_k P_k$ (union disjointe dénombrable), alors

$$m(A) := \sum_k m(P_k)$$

En particulier, si l'union est infinie dénombrable, on remarque que la quantité ci-dessus est une série à termes positifs, et sa valeur est donc soit finie (si la série converge), soit $+\infty$. La mesure d'un ensemble élémentaire peut donc être infinie.

DÉFINITION A.4 (Mesure extérieure). *Soit A une partie d'un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$. On définit sa mesure extérieure $\mu^*(A)$ par*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_k m(P_k) ; A \subset \bigsqcup_k P_k \right\}$$

où $A \subset \bigsqcup_k P_k$ désigne tous les recouvrements possibles de A par des ensembles élémentaires.

Cette mesure extérieure μ^* peut mesurer n'importe quelle partie de \mathbb{R}^n , mais elle a un désavantage majeur : la mesure extérieure d'une union d'ensembles deux à deux disjoints n'est pas nécessairement égale à la somme des mesures extérieures des ensembles en question (il est possible de construire un exemple, mais on ne le fera pas dans ce cours). Ainsi, la mesure que l'on cherche à construire ne va pas mesurer *toutes* les parties de \mathbb{R}^n : on ne va garder que les ensembles dont la *frontière* est suffisamment "raisonnable" pour pouvoir bien distinguer par des recouvrements dénombrables de pavés l'ensemble de son complémentaire. Ceci va se traduire sur la *différence symétrique* comme suit :

DÉFINITION A.5 (Ensemble mesurable). *On rappelle que la différence symétrique entre deux ensembles A et B est l'ensemble constitué par la réunion des éléments de A qui ne sont pas dans B , et des éléments de B qui ne sont pas dans A , c'est-à-dire*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Une partie A d'un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ est dite mesurable au sens de Lebesgue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire $B \subset E$ tel que

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$$

Autrement dit, les ensembles mesurables sont les ensembles *limites* d'ensembles élémentaires (on fait tendre vers 0 la mesure extérieure de leur différence symétrique). Ils ne sont donc pas simples à trouver ! Heureusement, nous en connaissons une grande partie (et cela nous suffira pour la suite) :

THÉORÈME A.6. *Tous les ensembles suivants sont mesurables (au sens de Lebesgue)*

- *tout ensemble élémentaire ;*
- *tout ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$;*
- *toute réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables ;*
- *toute intersection finie d'ensembles mesurables.*

A.2 Mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable

Il ne nous reste plus qu'à définir la mesure $m(A)$ de tout ensemble A mesurable. Tout simplement :

DÉFINITION A.7. *Si A est mesurable, alors sa mesure $m(A)$ est définie comme étant égale à sa mesure extérieure :*

$$m(A) := \mu^*(A)$$

On termine par deux propriétés très importantes de m :

PROPOSITION A.8. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des ensembles mesurables, et soit $A = \cup_n A_n$. Alors*

$$m(A) \leq \sum_n m(A_n)$$

De plus, si les A_n sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire $A = \bigsqcup_n A_n$ alors

$$m(A) = \sum_n m(A_n)$$

On donne maintenant les exemples à connaître (certains ont déjà été donnés plus haut) :

EXEMPLE A.9 (Mesures des ensembles classiques).

1. Si A est un pavé, par exemple $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ alors

$$m(A) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

2. Si A est un singleton, *i.e.* $A = \{x\}$ où $x \in \mathbb{R}^n$, alors $m(A) = 0$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est au plus dénombrable, alors $m(A) = 0$.

A.3 Fonctions mesurables

Avant de parler d'intégrale, il faut maintenant choisir la classe de fonctions que l'on va pouvoir intégrer. Dans la suite, lorsque rien n'est précisé, les fonctions peuvent avoir des valeurs réelles ou complexes.

DÉFINITION A.10 (Fonction mesurable). *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f est mesurable si : pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$A = \{x \in E ; f(x) > a\}$$

est un ensemble mesurable.

De manière similaire à ce qui précède, les fonctions mesurables n'ont pas l'air simples à caractériser. Heureusement, on a les résultats suivants.

THÉORÈME A.11. *Toute fonction continue sur E est mesurable.*

Toute limite simple de fonctions mesurables est mesurable, c'est-à-dire : si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, et si, pour tout $x \in E$,

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

alors f est mesurable.

THÉORÈME A.12. *Si f est une fonction mesurable, et si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions*

$$|f|, \quad g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

sont mesurables.

Enfin, on introduit une relation d'équivalence sur les fonctions mesurables :

DÉFINITION A.13. On dit qu'une fonction mesurable f est nulle presque partout sur E s'il existe un ensemble A de mesure nulle ($m(A) = 0$) tel que

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in E \setminus A$$

On note $f = 0$ p.p. sur E .

Comme l'union de deux ensembles de mesure nulle est également de mesure nulle, on peut définir une relation d'équivalence : on dit que deux fonctions mesurables f et g sont *équivalentes* si et seulement si

$$f - g = 0 \text{ p.p. sur } E$$

autrement dit, la différence entre f et g est nulle presque partout.

REMARQUE A.14. Existe-t-il des fonctions non mesurables ? La réponse est oui, mais il n'est pas facile d'en construire, exactement comme pour les ensembles mesurables. D'une manière générale, on peut dire que tous les ensembles "usuels" sont mesurables, et toutes les fonctions "usuelles" sont mesurables.

Par ailleurs, rappelons que la notion de mesure et d'ensemble mesurable est en réalité bien plus générale que telle que nous le présentons ici. Elle fait appel à des notions de *tribu*, *additivité*, *ensemble borélien*, etc. que l'on pourra retrouver par exemple dans le livre *Real and Complex Analysis* de Walter Rudin ou tout cours de mathématiques sur le sujet (niveau Licence de Mathématiques).

A.4 Intégrale de Lebesgue

A.4.1 Fonctions étagées

DÉFINITION A.15 (Fonction élémentaire). Une fonction élémentaire sur E est une fonction valant 1 sur une partie mesurable de E et 0 partout ailleurs (on parle aussi de fonction indicatrice). On la note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

En général de telles fonctions peuvent également être définies sur des ensembles non-mesurables, mais ceux-ci ne nous intéressent pas car ils ne jouent aucun rôle dans la théorie de Lebesgue.

DÉFINITION A.16 (Fonction étagée). *On appelle fonction étagée toute fonction définie par une combinaison linéaire de fonctions élémentaires, c'est-à-dire : f est étagée s'il existe des ensembles mesurables A_i et des scalaires α_i tel que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x).$$

L'intérêt des fonctions étagées est le résultat suivant :

THÉORÈME A.17. *Les fonctions étagées sont denses dans l'ensemble des fonctions mesurables.*

Autrement dit, les fonctions mesurables peuvent être considérées comme des limites simples de fonctions étagées.

DÉFINITION A.18 (Intégrale d'une fonction étagée). *Soit φ une fonction étagée*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

Si Ω est un ensemble mesurable, alors on appelle intégrale de φ sur Ω , notée $I_\Omega(\varphi)$, la quantité

$$I_\Omega(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap \Omega).$$

A.4.2 Intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable

On en déduit la définition de l'intégrale de Lebesgue :

DÉFINITION A.19 (Intégrale des fonctions mesurables positives). *Soit f une fonction mesurable sur E à valeurs réelles positives, et soit $\Omega \subset E$ une partie mesurable. L'intégrale de Lebesgue sur Ω est la borne supérieure des intégrales sur Ω de toutes les fonctions étagées positives majorées par f , c'est-à-dire :*

$$\int_{\Omega} f = \sup \left\{ I_\Omega(\varphi) ; \varphi \text{ est étagée et } \varphi \leq f \right\}$$

Dans la suite on notera indifféremment

$$\int_{\Omega} f \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} f(x) dx$$

PROPOSITION A.20. Soit f une fonction mesurable sur E positive, et soit $\Omega \subset E$ une partie mesurable. D'après le Théorème A.17, f peut s'écrire comme limite simple d'une suite de fonctions étagées φ_n , i.e.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\Omega}(\varphi_n)$$

Autrement dit, au lieu de calculer un supremum, on peut calculer une limite, à condition de connaître la suite φ_n . On remarque que $\int_{\Omega} f$ peut prendre une valeur infinie.

On a défini l'intégrale de toute fonction mesurable positive. Nous étendons à un cas plus général : soit f une fonction mesurable à valeurs réelles, et soit f^+ et f^- ses parties positive et négative, données par

$$\begin{aligned} f^+(x) &= |f(x)| \mathbf{1}_{\{x; f(x) \geq 0\}}(x) \\ f^-(x) &= |f(x)| \mathbf{1}_{\{x; f(x) \leq 0\}}(x) \end{aligned}$$

Alors, f^+ et f^- sont toutes les deux mesurables et positives, et on a, pour tout $x \in E$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Cette décomposition permet de définir l'intégrale de Lebesgue pour toute fonction mesurable :

DÉFINITION A.21 (Intégrale des fonctions mesurables à valeurs réelles). Soit f une fonction mesurable sur E , à valeurs réelles, alors pour tout $\Omega \subset E$ mesurable on définit

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-$$

On peut facilement étendre cette définition aux fonctions à valeurs complexes en décomposant f selon : $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$ et en appliquant la définition précédente à $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Encore une fois, la valeur de l'intégrale $\int_{\Omega} f$ peut être infinie, voire indéterminée (si les deux intégrales $\int_{\Omega} f^+$ et $\int_{\Omega} f^-$ sont infinies, par exemple). On va donc se restreindre à une certaine classe de fonctions :

DÉFINITION A.22 (Fonctions Lebesgue intégrables). On dit qu'une fonction f mesurable (à valeurs réelles ou complexes), définie sur E , est Lebesgue intégrable sur E si

$$\int_E |f| < +\infty$$

On note $\mathbb{L}^1(E)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue intégrables sur E pour lequel on a identifié toutes les fonctions égales presque partout : deux fonctions f et g sont égales dans $\mathbb{L}^1(E)$ si $f = g$ p.p. sur E .

Le résultat suivant est fondamental :

THÉORÈME A.23. *L'intégrale sur E d'une fonction positive f est nulle si et seulement si f est nulle presque partout sur E . Autrement dit :*

$$\int_E |f| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ p.p. sur } E$$