Beaucoup de particules et un peu de hasard

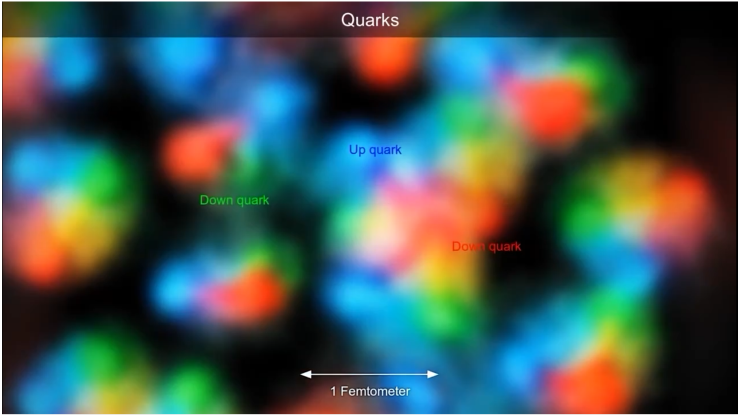
Marielle Simon

Université Lyon 1, Institut Camille Jordan

Classes préparatoires lycée Blaise Pascal, mai 2024

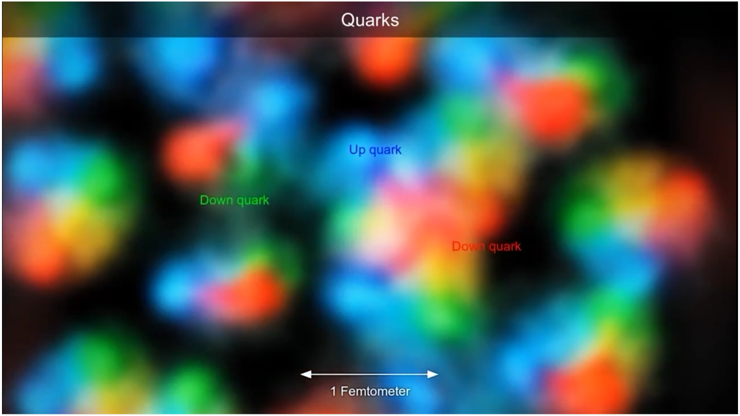
Changements d'échelles

D'un infini à l'autre



Cosmic eye, par l'astrophysicien Danail Obreschkow

D'un infini à l'autre

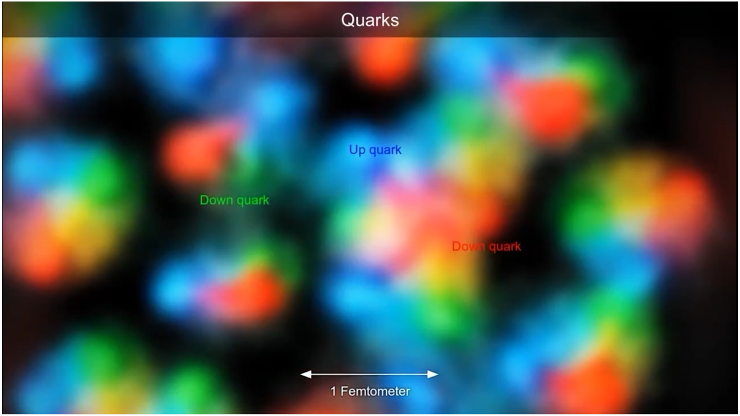


Cosmic eye, par l'astrophysicien Danail Obreschkow

$$\text{Taille de l'univers} \;\simeq\; 10^{41} \times \text{ ``particule élémentaire''}$$

$$\text{Âge de l'univers} \;\simeq\; 10^{33} \times \text{ ``vibration atomique''}$$

D'un infini à l'autre



Cosmic eye, par l'astrophysicien Danail Obreschkow

$$\text{Taille de l'univers} \simeq 10^{41} \times \text{“particule élémentaire”}$$
$$\text{Âge de l'univers} \simeq 10^{33} \times \text{“vibration atomique”}$$

▷ Les nombres **plus grands que** 10^{156} sont **infinis** en pratique !

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

- Les **liquides** sont plus ou moins **visqueux**

©Wikipedia/Gerridae

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

- Les **liquides** sont plus ou moins **visqueux**

©Wikipedia/Gerridae

©www.activeforlife.com

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

- Les **liquides** sont plus ou moins **visqueux**

©Wikipedia/Gerridae

©`www.activeforlife.com`

- Le mouvement peut être **réversible** ou **irréversible**

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

- Les **liquides** sont plus ou moins **visqueux**

©Wikipedia/Gerridae

©www.activeforlife.com

- Le mouvement peut être **réversible** ou **irréversible**

Collision de billes

Le comportement de la **nature** change en fonction de l'**échelle**

- Les **liquides** sont plus ou moins **visqueux**

©Wikipedia/Gerridae

©`www.activeforlife.com`

- Le mouvement peut être **réversible** ou **irréversible**

Collision de billes

© YouTube `www.leblob.fr`

Irréversibilité **vs** Réversibilité

- Matière constituée d'**atomes**

Irréversibilité **vs** Réversibilité

- Matière constituée d'**atomes** + **Lois de mouvements** de Newton

Irréversibilité **vs** Réversibilité

Matière constituée d'**atomes** + **Lois de mouvements** de Newton

... Au niveau **microscopique** la dynamique est **réversible !**

- Matière constituée d'**atomes** **+** **Lois de mouvements** de Newton

  ... Au niveau **microscopique** la dynamique est **réversible !**

Pourquoi le même phénomène devient-il **irréversible** à l'échelle **macroscopique ?**

Irréversibilité **vs** Réversibilité

Matière constituée d'**atomes** ✚ **Lois de mouvements** de Newton

… Au niveau **microscopique** la dynamique est **réversible !**

Pourquoi le même phénomène devient-il **irréversible** à l'échelle **macroscopique ?**

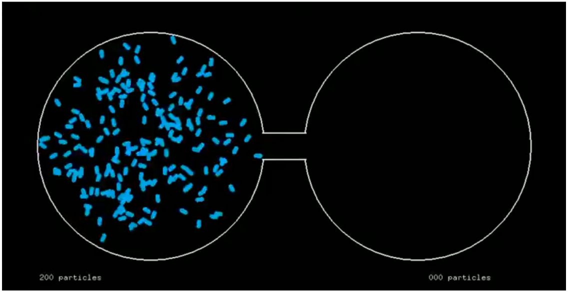
Expérience de Paul et Tatiana **Ehrenfest (1912)**

Matière constituée d'**atomes** ✚ **Lois de mouvements** de Newton

... Au niveau **microscopique** la dynamique est **réversible !**

Pourquoi le même phénomène devient-il **irréversible** à l'échelle **macroscopique ?**

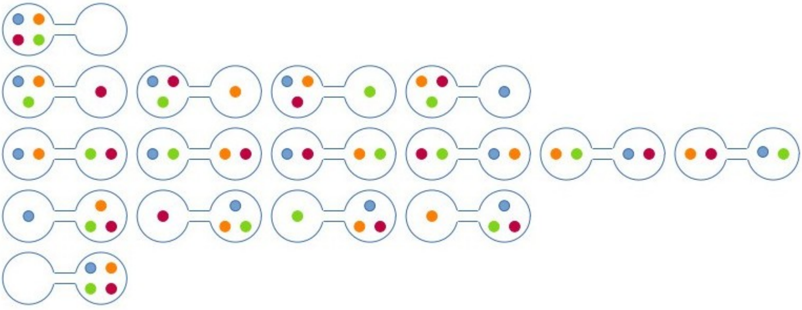
Expérience de Paul et Tatiana **Ehrenfest (1912)**



©N. Berglund (Images des Mathématiques)

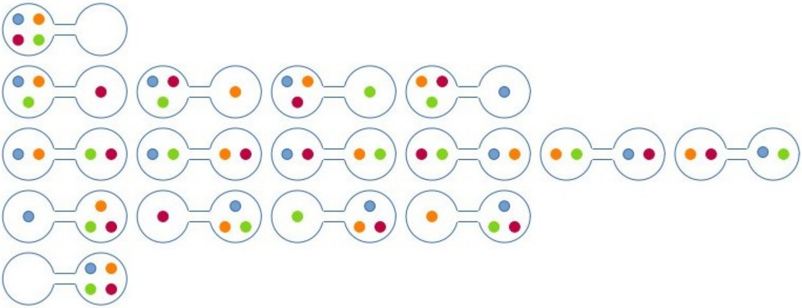
Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**



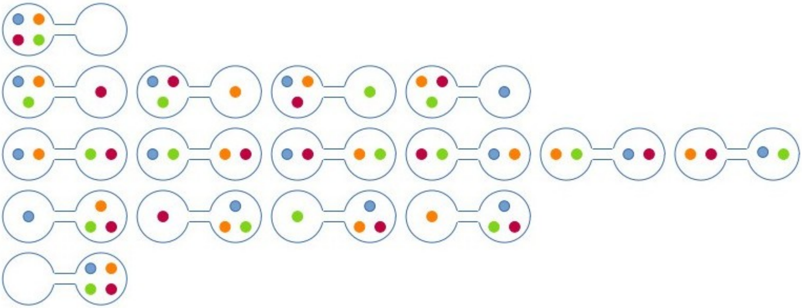
- ▷ Pour 4 particules, il y a

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**



- Pour 4 particules, il y a
  5 configurations **macroscopiques**

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**

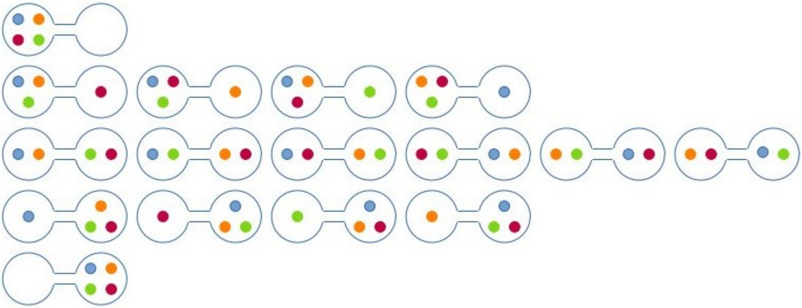


- Pour 4 particules, il y a

  5 configurations **macroscopiques**

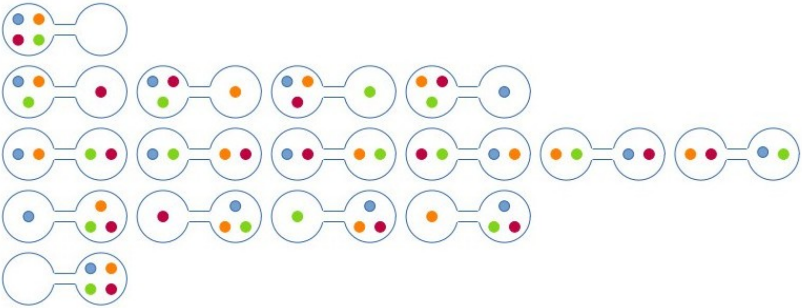
  16 configurations **microscopiques**

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**



- Pour N particules, il y a
  - **?** configurations **macroscopiques**
  - **?** configurations **microscopiques**

Ce que l'on voit **diffère en fonction de l'échelle**

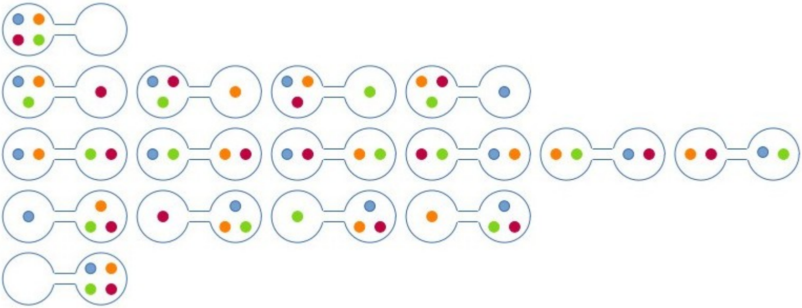


▷ Pour N particules, il y a

$N+1$ configurations **macroscopiques**

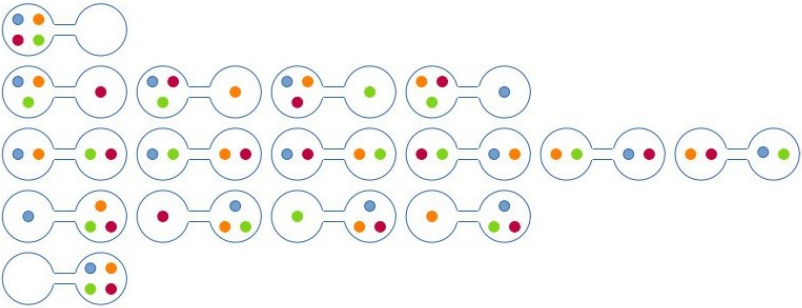
? configurations **microscopiques**

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**



- Pour N particules, il y a
  - $N+1$ configurations **macroscopiques**
  - 2^N configurations **microscopiques**

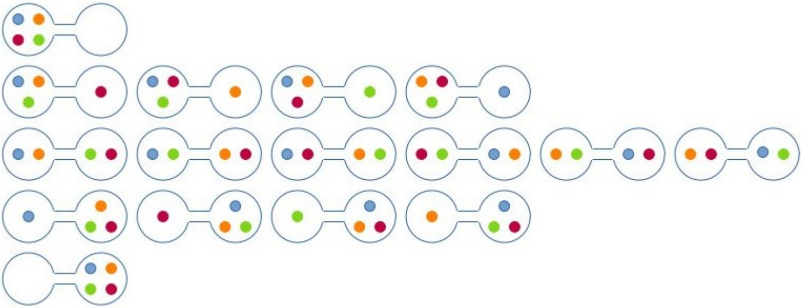
Ce que l'on voit **diffère en fonction de l'échelle**



- Pour N particules, il y a
  - $N+1$ configurations **macroscopiques**
  - 2^N configurations **microscopiques**

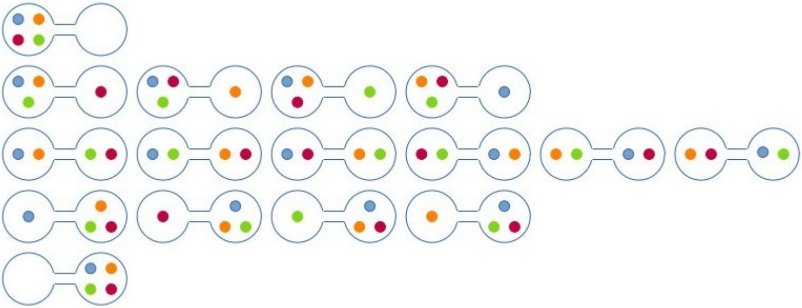
- Dans 10cL d'eau, on a $N \simeq 10^{24}$ molécules...

Ce que l'on voit **différe en fonction de l'échelle**



- Pour N particules, il y a
  - $N+1$ configurations **macroscopiques**
  - 2^N configurations **microscopiques**
- Dans 10cL d'eau, on a $N \simeq 10^{24}$ molécules... $2^{10^{24}} \gg 10^{156}$ **!**

Ce que l'on voit **diffère en fonction de l'échelle**



- Pour N particules, il y a
  - $N+1$ configurations **macroscopiques**
  - 2^N configurations **microscopiques**
- Dans 10cL d'eau, on a $N \simeq 10^{24}$ molécules... $2^{10^{24}} \gg 10^{156}$ **!**

À l'échelle **macroscopique**, on ne voit **pas toutes** les configurations microscopiques, on voit seulement **la plus probable**

La physique statistique

Un système de particules donné ne peut jamais aller de lui-même vers un état de même probabilité, mais seulement vers un état ***plus probable****.* (Boltzmann)

- **6ème problème de Hilbert** (1900) sur 23 !

Du **microscopique** au **macroscopique**

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

Du **microscopique** au **macroscopique**

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

▷ Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique

Du **microscopique** au **macroscopique**

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

- ▷ Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique
- ▷ La dépendance aux **détails microscopiques** est très **faible**

Du **microscopique** au **macroscopique**

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

- Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique
- La dépendance aux **détails microscopiques** est très **faible**

1860-1950

L'aléatoire est fondamental dans les descriptions microscopiques

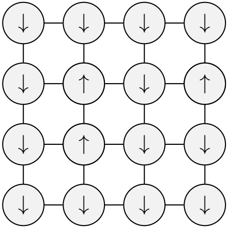
Du **microscopique** au **macroscopique**

> Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

- ▷ Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique
- ▷ La dépendance aux **détails microscopiques** est très **faible**

1860-1950

L'aléatoire est fondamental dans les descriptions microscopiques



Ising, Brown, Einstein, etc.

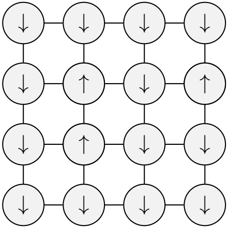
Du **microscopique** au **macroscopique**

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

- Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique
- La dépendance aux **détails microscopiques** est très **faible**

1860-1950

L'aléatoire est fondamental dans les descriptions microscopiques



Ising, Brown, Einstein, etc.

1968

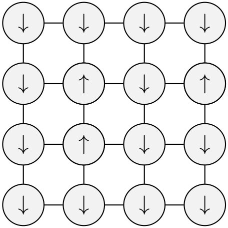
Modèle de **gaz sur réseaux stochastique** en biologie

Peut-on **déduire** les propriétés observées à **notre échelle** à partir de celles du niveau **inférieur**, supposées plus simples et élémentaires ?

- ▷ Il est **impossible** de **tout connaître** au niveau atomique
- ▷ La dépendance aux **détails microscopiques** est très **faible**

1860-1950

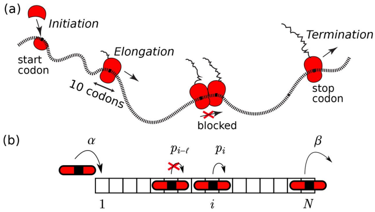
L'aléatoire est fondamental dans les descriptions microscopiques



Ising, Brown, Einstein, etc.

1968

Modèle de **gaz sur réseaux stochastique** en biologie

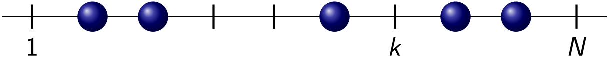


Gibbs, Macdonald, Pipkin

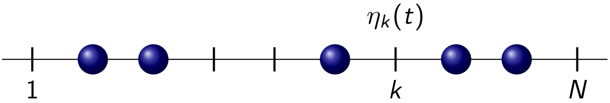
Les processus d'exclusion simple

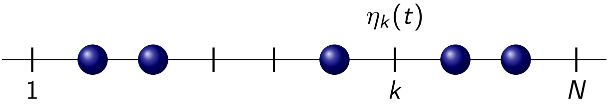
Particles (of size $\ell = 3$ here) enter the lattice at rate α and a particle at position i moves one site to the right at rate p_i, provided that the move is not blocked by another particle in front. (Gibbs, Macdonald, Pipkin)

Un paradigme : le Simple Symmetric Exclusion Process (SSEP)



Un paradigme : le Simple Symmetric Exclusion Process (SSEP)

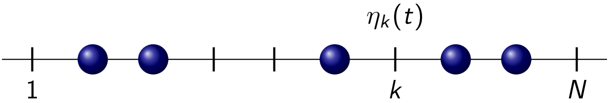




- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\eta_k(t) \in \{0, 1\}}$$ **occupation** au site k

Un paradigme : le Simple Symmetric Exclusion Process (SSEP)

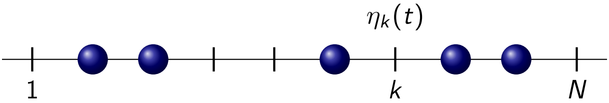


- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

$\boxed{\eta_k(t) \in \{0, 1\}}$ **occupation** au site k

- Pour tout $t \geqslant 0$, $\eta(t) := \{\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_N(t)\}$ est une

$\boxed{\textbf{variable aléatoire} \text{ sur } \Omega = \{0,1\}^N}$



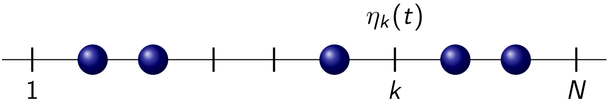
- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\eta_k(t) \in \{0,1\}} \qquad \textbf{occupation} \text{ au site } k$$

- Pour tout $t \geqslant 0$, $\eta(t) := \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_N(t)\}$ est une

$$\boxed{\textbf{variable aléatoire} \text{ sur } \Omega = \{0,1\}^N} \qquad \#\Omega = 2^N$$

Un paradigme : le Simple Symmetric Exclusion Process (SSEP)



- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

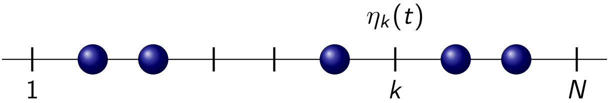
$$\boxed{\eta_k(t) \in \{0, 1\}} \qquad \textbf{occupation} \text{ au site } k$$

- Pour tout $t \geqslant 0$, $\eta(t) := \{\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_N(t)\}$ est une

$$\boxed{\textbf{variable aléatoire} \text{ sur } \Omega = \{0, 1\}^N} \qquad \#\Omega = 2^N$$

- Les particules **se déplacent** suivant une **dynamique aléatoire**

Un paradigme : le Simple Symmetric Exclusion Process (SSEP)



- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

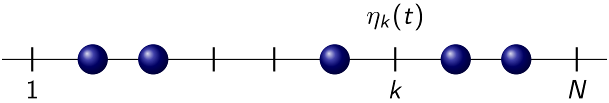
$$\boxed{\eta_k(t) \in \{0,1\}} \qquad \textbf{occupation} \text{ au site } k$$

- Pour tout $t \geqslant 0$, $\eta(t) := \{\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_N(t)\}$ est une

$$\boxed{\textbf{variable aléatoire} \text{ sur } \Omega = \{0,1\}^N} \qquad \#\Omega = 2^N$$

- Les particules **se déplacent** suivant une **dynamique aléatoire** qui a la propriété **d'absence de mémoire**

Un paradigme : le **S**imple **S**ymmetric **E**xclusion **P**rocess (**SSEP**)



- Système de particules avec **règle d'exclusion** : pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\eta_k(t) \in \{0,1\}}$$ **occupation** au site k

- Pour tout $t \geqslant 0$, $\eta(t) := \{\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_N(t)\}$ est une

$$\boxed{\textbf{variable aléatoire} \text{ sur } \Omega = \{0,1\}^N} \qquad \#\Omega = 2^N$$

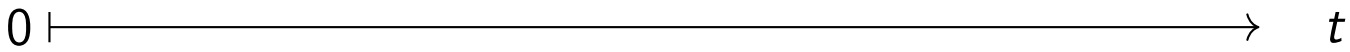
- Les particules **se déplacent** suivant une **dynamique aléatoire** qui a la propriété **d'absence de mémoire**

*La loi de probabilité conditionnelle des états futurs étant donnés le présent et le passé dépend **uniquement** du présent.*

- Les **arrivées de bus** :

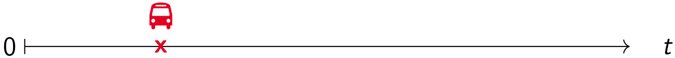
La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

▷ Les **arrivées de bus** :

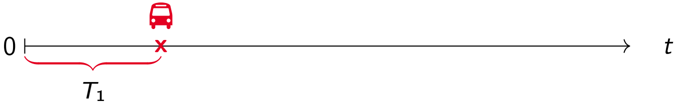


La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

- Les **arrivées de bus** :

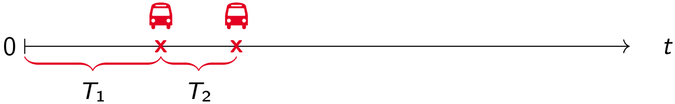


- Les **arrivées de bus** :

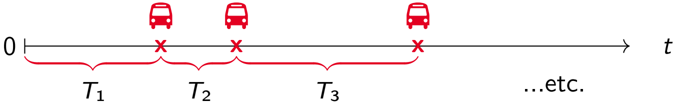


La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

- Les **arrivées de bus** :

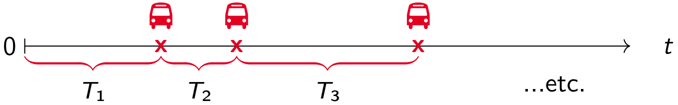


- Les **arrivées de bus** :



La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

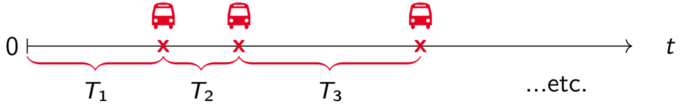
▷ Les **arrivées de bus** :



- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)

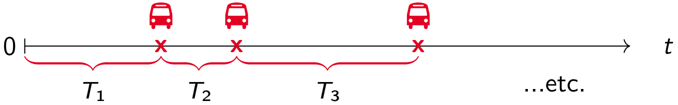
La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

▷ Les **arrivées de bus** :



- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**

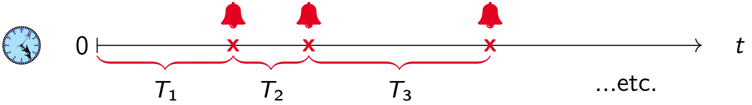
▷ Les **arrivées de bus** :



- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t + s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

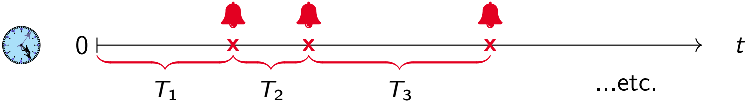
La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

▷ ~~Les arrivées de bus~~ $\mapsto$ **L'horloge exponentielle** :



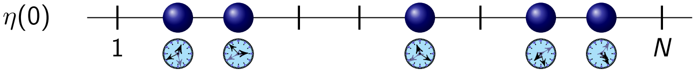
- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t+s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

▷ ~~Les arrivées de bus~~ $\mapsto$ **L'horloge exponentielle** :



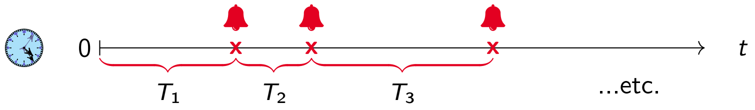
- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t + s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

▷ **Plusieurs horloges** indépendantes sur **chaque particule**



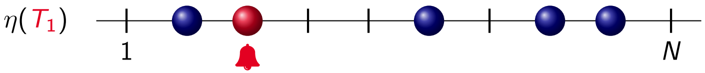
La dynamique du SSEP avec absence de mémoire

▷ ~~Les arrivées de bus~~ $\mapsto$ **L'horloge exponentielle** :



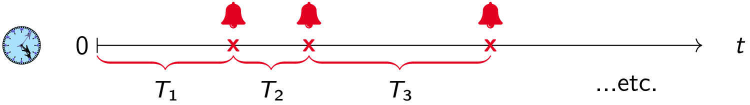
- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t + s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

▷ **Plusieurs horloges** indépendantes sur **chaque particule**



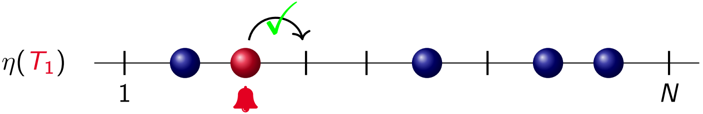
▷ Lorsqu'une horloge **sonne**,

▷ ~~Les arrivées de bus~~ $\mapsto$ **L'horloge exponentielle** :



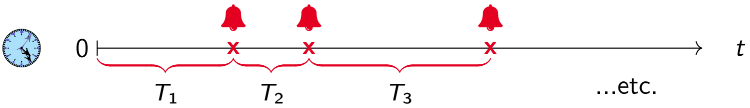
- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t + s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

▷ **Plusieurs horloges** indépendantes sur **chaque particule**



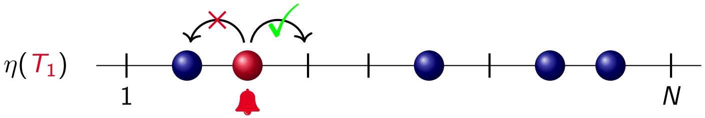
▷ Lorsqu'une horloge **sonne**, la particule **choisit un site voisin** avec probabilité $\frac{1}{2}$ et **saute** sur ce site

▷ ~~Les arrivées de bus~~ $\mapsto$ **L'horloge exponentielle** :



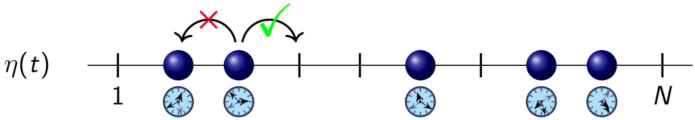
- Chaque T_i suit une **loi exponentielle** $\mathrm{Exp}(1)$ sur $\mathbb{R}_+$ (de moyenne 1)
- Les variables T_i sont **indépendantes**
- **Absence de mémoire** : $\mathbb{P}\big(T_1 > t + s \mid T_1 > s\big) = \mathbb{P}\big(T_1 > t\big)$

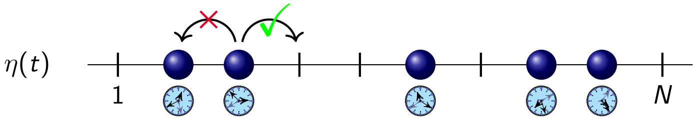
▷ **Plusieurs horloges** indépendantes sur **chaque particule**



▷ Lorsqu'une horloge **sonne**, la particule **choisit un site voisin** avec probabilité $\frac{1}{2}$ et **saute** sur ce site ...**si c'est possible !**

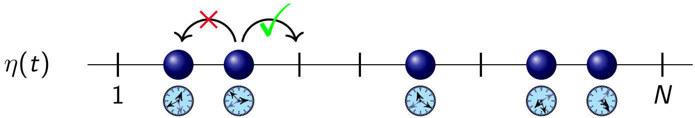
Pour résumer : le SSEP c'est ...





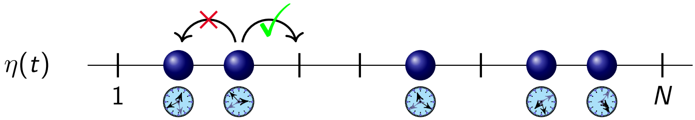
- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**

Pour résumer : le SSEP c'est ...

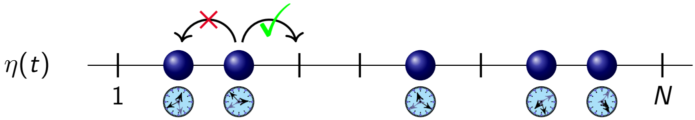


- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$

Pour résumer : le SSEP c'est ...



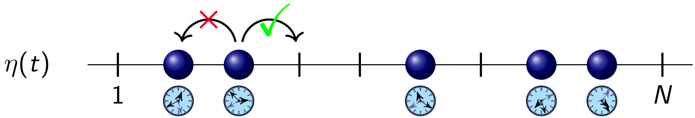
- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**



- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**

Pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(t) \equiv \overline{\rho} \in [0,1]}$$



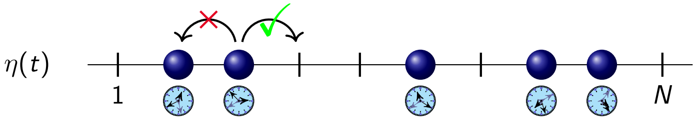
- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**

Pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(t) \equiv \overline{\rho} \in [0,1]}$$

$$\textbf{DENSITÉ} = \frac{\text{nbre particules}}{\text{nbre sites}}$$

Pour résumer : le SSEP c'est ...



- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**

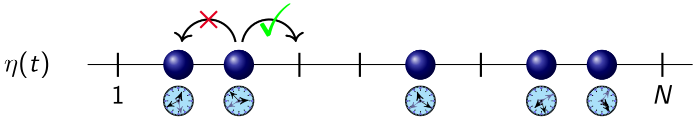
Pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(t) \equiv \overline{\rho} \in [0,1]}$$

$$\textbf{DENSITÉ} = \frac{\text{nbre particules}}{\text{nbre sites}}$$

Et maintenant ?

Pour résumer : le SSEP c'est ...



- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**

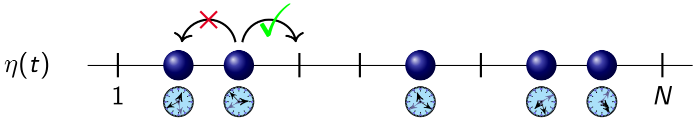
Pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \eta_k(t) \equiv \overline{\rho} \in [0,1]}$$

$$\textbf{DENSITÉ} = \frac{\text{nbre particules}}{\text{nbre sites}}$$

Et maintenant ? On veut faire tendre $N \to +\infty$ **!**

Pour résumer : le SSEP c'est ...



- Un système de particules qui **évolue aléatoirement**
- qui est entièrement décrit par $\eta(t)$ = **variable aléatoire** sur $\{0,1\}^N$
- qui **conserve** toujours le **même nombre de particules**

Pour tout $t \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(t) \equiv \overline{\rho} \in [0,1]}$$

$$\textbf{DENSITÉ} = \frac{\text{nbre particules}}{\text{nbre sites}}$$

Et maintenant ? On veut faire tendre $N \to +\infty$ **!**

1. Comment décrire le système **"infini" ?**
2. Comment se **répartissent** les particules au cours du temps **?**

Objectif : limites hydrodynamiques $N \to +\infty$

- ▷ **Initialement :** profil de densité $\rho_{\mathrm{ini}} : [0,1] \to [0,1]$ **fixé**

Objectif : limites hydrodynamiques $N \to +\infty$

▷ **Initialement :** profil de densité $\rho_{\text{ini}} : [0,1] \to [0,1]$ **fixé**

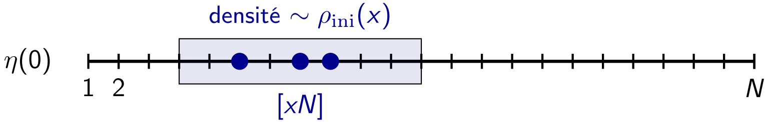
$$\boxed{\text{pour tout } k, \quad \eta_k(0) = 1 \quad \text{avec proba} \quad \rho_{\text{ini}}\left(\tfrac{k}{N}\right)}$$

Objectif : limites hydrodynamiques $N \to +\infty$

▷ **Initialement :** profil de densité $\rho_{\text{ini}} : [0,1] \to [0,1]$ **fixé**

$$\boxed{\text{pour tout } k, \quad \eta_k(0) = 1 \quad \text{avec proba } \rho_{\text{ini}}(\tfrac{k}{N})}$$

Pour tout $x \in [0,1]$,

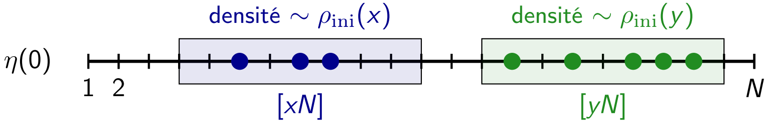


Objectif : limites hydrodynamiques $N \to +\infty$

▷ **Initialement :** profil de densité $\rho_{\text{ini}} : [0,1] \to [0,1]$ **fixé**

$$\boxed{\text{pour tout } k, \quad \eta_k(0) = 1 \quad \text{avec proba} \quad \rho_{\text{ini}}\left(\tfrac{k}{N}\right)}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$

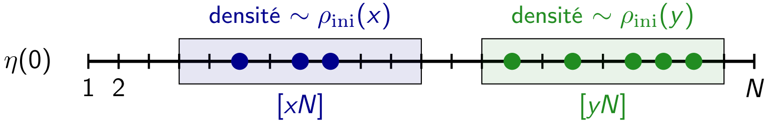


Objectif : limites hydrodynamiques $N \to +\infty$

▷ **Initialement :** profil de densité $\rho_{\text{ini}} : [0,1] \to [0,1]$ **fixé**

$$\boxed{\text{pour tout } k, \quad \eta_k(0) = 1 \quad \text{avec proba} \quad \rho_{\text{ini}}\left(\tfrac{k}{N}\right)}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$



▷ **Accélération** : on étudie le système $\left\{\eta_k(tN^a)\right\}_{k=1,\dots,N}$

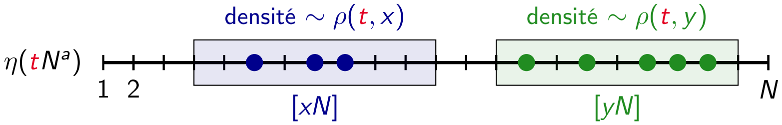
Dynamique **microscopique** $\Longrightarrow$ Description **macroscopique**

limite hydrodynamique

$N \to \infty$

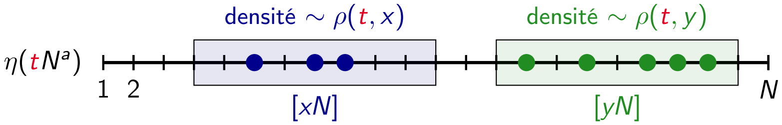
OBJECTIF: Pour le processus **accéléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**

OBJECTIF: Pour le processus **acceléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**



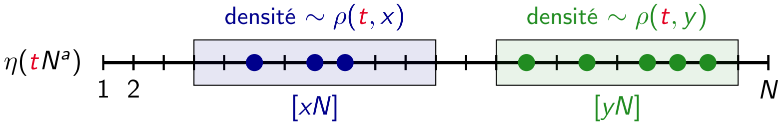
Le Graal mathématique

OBJECTIF: Pour le processus **acceléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**



Autrement dit...

OBJECTIF: Pour le processus **acceléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**

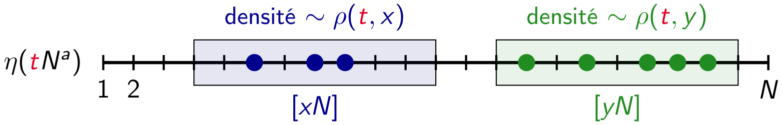


Autrement dit...

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{?}\int_0^1\rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x}$$

Le Graal mathématique

OBJECTIF: Pour le processus **acceléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**



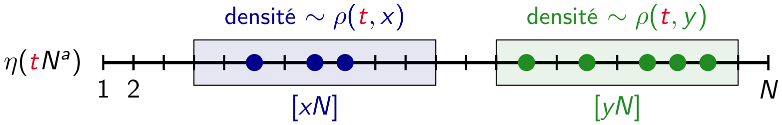
Autrement dit...

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \eta_k(tN^a)\, G\left(\tfrac{k}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{\textbf{?}} \int_0^1 \rho(t,x)\, G(x)\, \mathrm{d}x}$$

- $\rho(0,x) = \rho_{\mathrm{ini}}(x)$

Le Graal mathématique

OBJECTIF: Pour le processus **acceléré** $\eta(tN^a)$... c'est toujours **VRAI !**



Autrement dit...

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{?} \int_0^1 \rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x}$$

- $\rho(0,x)=\rho_{\mathrm{ini}}(x)$
- $\rho(t,x)$ est solution d'une Équation aux Dérivées Partielles

  (**équation hydrodynamique**)

Premier résultat

THÉORÈME : limites hydrodynamiques pour le SSEP [1990′]

Dans l'échelle **diffusive** $a = 2$, la **densité empirique** converge

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 \rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

où le profil $\rho(t,x)$ est solution de **l'équation de la chaleur**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \qquad \rho(0,\cdot) = \rho_{\mathrm{ini}}(\cdot).$$

THÉORÈME : limites hydrodynamiques pour le SSEP [1990′]

Dans l'échelle **diffusive** $a = 2$, la **densité empirique** converge

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 \rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

où le profil $\rho(t,x)$ est solution de **l'équation de la chaleur**

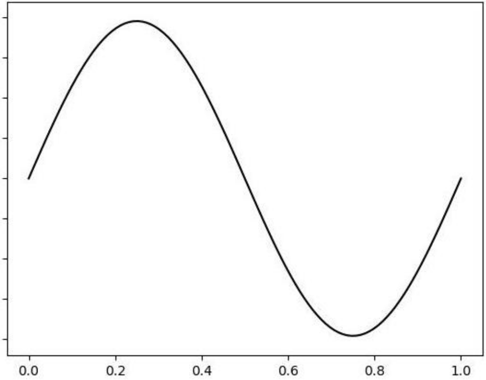
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \qquad \rho(0,\cdot) = \rho_{\mathrm{ini}}(\cdot).$$

- Échelle **diffusive** car la dynamique est **symétrique**
- Équation aux Dérivées Partielles **très régulière**

  ... *qui décrit aussi la propagation de la chaleur dans un milieu isolé !*

▷ Simulation du modèle **microscopique** (SSEP) `ici`

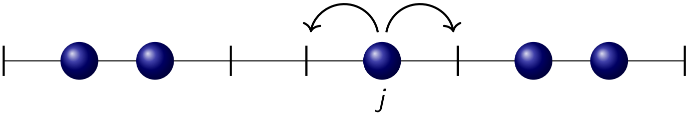
- Simulation du modèle **microscopique** (SSEP) `ici`
- L'équation de la chaleur **macroscopique** en dimension 1

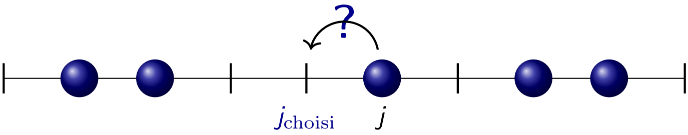


Et si on ajoutait des **contraintes** cinétiques ?

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)

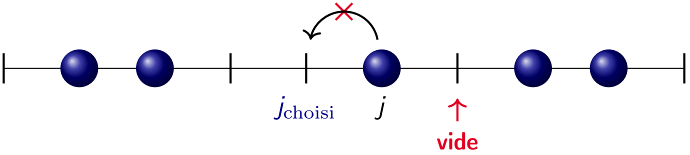




Le saut d'une particule

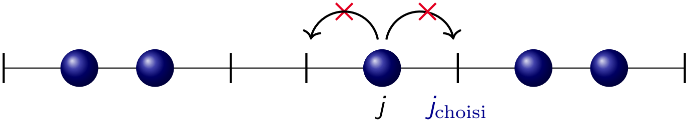
est FACILITÉ par son **propre voisin** !

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)



Le saut d'une particule

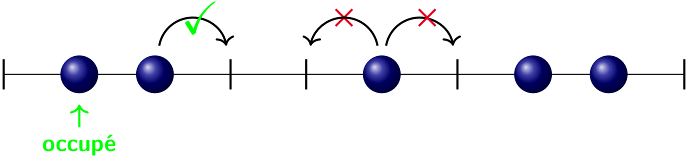
est FACILITÉ par son **propre voisin** !



Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

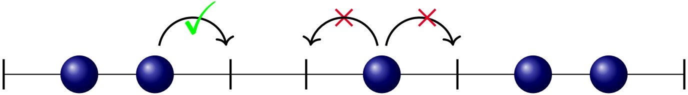
Le Facilitated Exclusion Process (FEP)



Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)

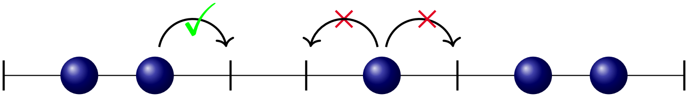


Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** 🗎 **2010**

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)

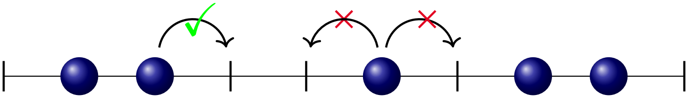


Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

- ▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** 🗎 **2010**
- ▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! 🔍 **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$

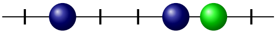
Le Facilitated Exclusion Process (FEP)



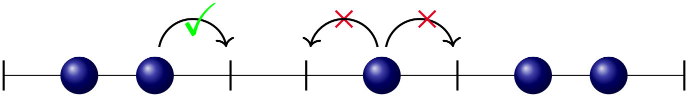
Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

- ▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** 📄 **2010**
- ▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! 🔍 **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$

$\rho < \frac{1}{2}$ 

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)



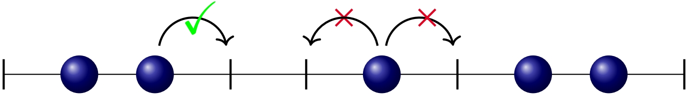
Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

- ▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** **2010**
- ▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$

$\rho < \frac{1}{2}$  **bloquée !**

Le Facilitated Exclusion Process (FEP)



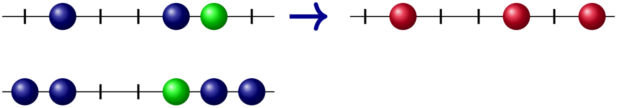
Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

- ▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** 2010
- ▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$

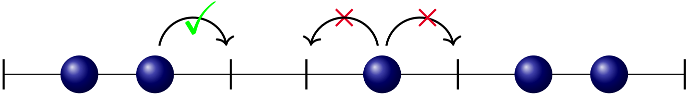
$\rho < \frac{1}{2}$

$\rho > \frac{1}{2}$



bloquée !

Le **F**acilitated **E**xclusion **P**rocess (FEP)



Le saut d'une particule

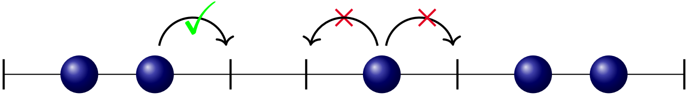
est FACILITÉ par son **propre voisin** !

▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** **2010**

▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$

$\rho < \frac{1}{2}$  **bloquée !**

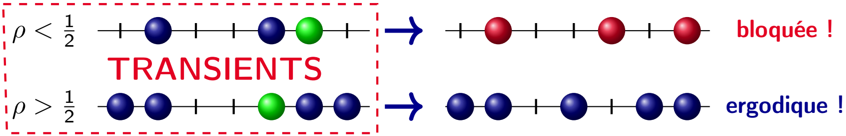
$\rho > \frac{1}{2}$  **ergodique !**



Le saut d'une particule

est FACILITÉ par son **propre voisin** !

- ▷ Apparu dans la **littérature physique et mathématique** 🗎 **2010**
- ▷ **Plus compliqué** que le SSEP ! 🔍 **Transition de phase** à $\rho_c = \frac{1}{2}$



THÉORÈME (Blondel, Erignoux, Simon, 2021)

La densité empirique converge

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_0^1\rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

où le profil $\rho(t,x)$ est solution du **problème de Stefan**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\begin{cases}0 & \text{si } \rho<\frac{1}{2}\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2\rho-1}{\rho}\right) & \text{si } \rho>\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \text{et}\quad \rho(0,\cdot)=\rho_{\mathrm{ini}}(\cdot).$$

Comportement **macroscopique**

THÉORÈME (Blondel, Erignoux, Simon, 2021)

La densité empirique converge

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_0^1\rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

où le profil $\rho(t,x)$ est solution du **problème de Stefan**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\begin{cases}0 & \text{si } \rho<\frac{1}{2}\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2\rho-1}{\rho}\right) & \text{si } \rho>\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \text{et}\quad \rho(0,\cdot)=\rho_{\mathrm{ini}}(\cdot).$$

- Présence d'une **frontière libre** entre $\{\rho<\frac{1}{2}\}$ et $\{\rho>\frac{1}{2}\}$

Comportement **macroscopique**

THÉORÈME (Blondel, Erignoux, Simon, 2021)

La densité empirique converge

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(tN^a)G\left(\tfrac{k}{N}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_0^1\rho(t,x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

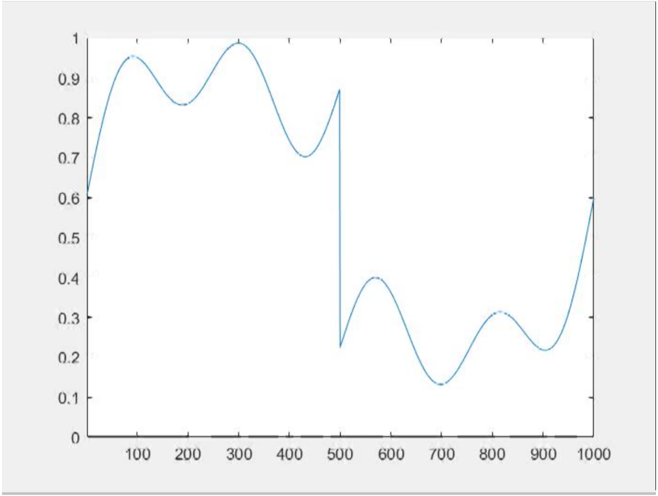
où le profil $\rho(t,x)$ est solution du **problème de Stefan**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\begin{cases}0 & \text{si } \rho<\frac{1}{2}\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2\rho-1}{\rho}\right) & \text{si } \rho>\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \text{et}\quad \rho(0,\cdot)=\rho_{\mathrm{ini}}(\cdot).$$

- Présence d'une **frontière libre** entre $\{\rho<\frac{1}{2}\}$ et $\{\rho>\frac{1}{2}\}$
- Correspond au niveau **microscopique** à la séparation

$$\underbrace{\cdots\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\cdots}_{\textbf{GELÉS}}\;/\;\underbrace{\cdots\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\cdots}_{\textbf{ERGODIQUES}}$$

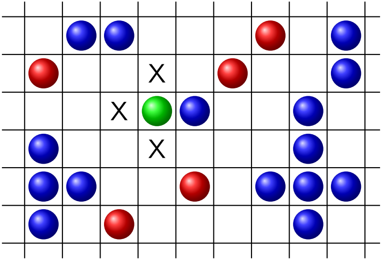
Simulations de $\rho(t,x)$ avec frontière libre



©C. Erignoux

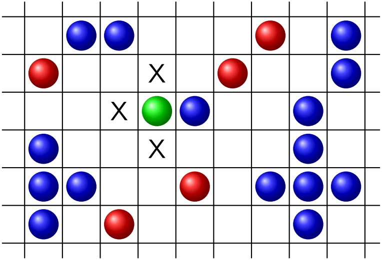
Et en dimension **plus grande** ? BONNE QUESTION !

La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



Et en dimension **plus grande** ? BONNE QUESTION !

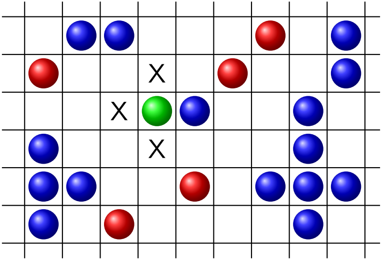
La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



On ne sait **presque rien...**

Et en dimension **plus grande** ? BONNE QUESTION !

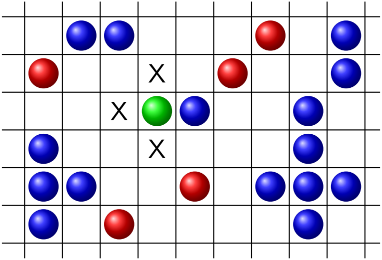
La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$?

Et en dimension **plus grande** ? BONNE QUESTION !

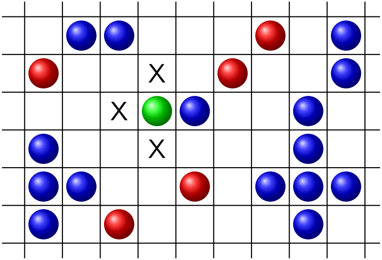
La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$? Il y en a **une autre** !

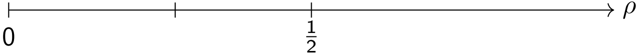
Et en dimension plus grande ? BONNE QUESTION !

La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



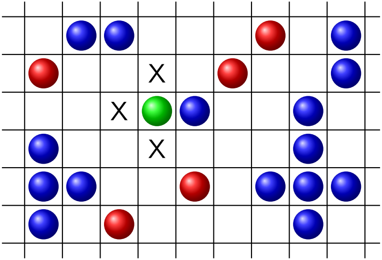
On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$? Il y en a **une autre** !

Soit $T_N(\rho) = \inf\{t \geqslant 0\ ;\ \eta(t) \text{ est gelé}\}$ où ρ est la **densité initiale**



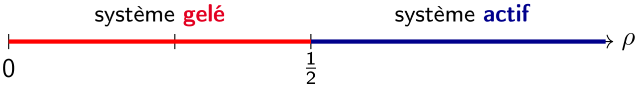
Et en dimension plus grande ? BONNE QUESTION !

La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



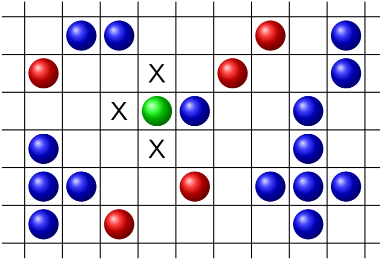
On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$? Il y en a **une autre** !

Soit $T_N(\rho) = \inf\{t \geqslant 0 \ ; \ \eta(t) \text{ est gelé}\}$ où ρ est la **densité initiale**



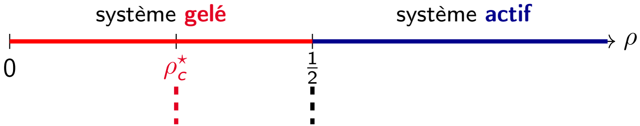
Et en dimension plus grande ? BONNE QUESTION !

La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



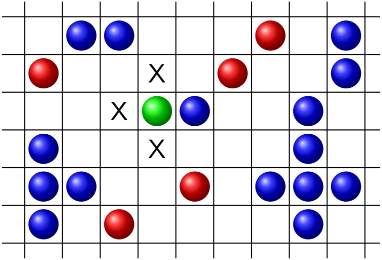
On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$? Il y en a **une autre** !

Soit $T_N(\rho) = \inf\{t \geqslant 0\ ;\ \eta(t) \text{ est gelé}\}$ où ρ est la **densité initiale**



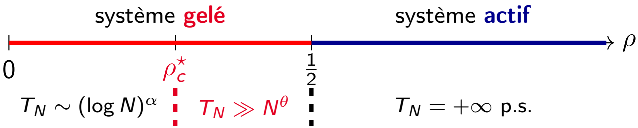
Et en dimension plus grande ? BONNE QUESTION !

La **contrainte pour sauter** ? *Avoir au moins un des k voisins occupés*



On ne sait **presque rien...** Densité critique $\frac{1}{2}$? Il y en a **une autre** !

Soit $T_N(\rho) = \inf\{t \geqslant 0 \ ; \ \eta(t) \text{ est gelé}\}$ où ρ est la **densité initiale**



MERCI !