TD 1 - Analyse 1 2014

Corrigé

Exercice 1.

1. a. $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Par l'absurde : supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p' \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$r + x = \frac{p'}{q'}$. Et donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'}$ où $qp' - pq' \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}^*$

c'est à dire $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ contradiction. Donc $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b. Supposons par l'absurde que $rx \in \mathbb{Q}$ alors il existe p' et q', $p' \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ t.q.

$rx = \frac{p'}{q'}$ et donc $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ car $p'q \in \mathbb{Z}$ et $q'p \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$ contradiction

2. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ avec p et q premiers entre eux t.q. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (fraction irréductible)

a) On élève au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ c.à.d : $p^2 = 2q^2$

b) Donc p^2 est pair. Donc p aussi est pair. En effet : "si $p \in \mathbb{Z}$ p est pair $\Leftrightarrow p^2$ est pair"

$\boxed{\Rightarrow}$ p pair $\Rightarrow p^2$ pair : si $p = 2a$ ($a \in \mathbb{Z}$) alors $p^2 = 4a^2$

c.à.d $p^2 = 2[2a^2]$

$\Rightarrow p^2$ est pair

$\boxed{\Leftarrow}$ se démontre par contraposée (c.à.d qu'au lieu de montrer p^2 pair $\Rightarrow p$ pair on montre "p impair $\Rightarrow p^2$ impair")

si p est impair, $p = 2a+1$, $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2[2a^2 + 2a] + 1$

$= 2b + 1$ impair ($b \in \mathbb{Z}$)

Autrement dit on peut écrire $p = 2a$ où $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2 = 4a^2$ or $p^2 = 2q^2$

c) Par conséquent $4a^2 = 2q^2$ c.à.d $q^2 = 2a^2 \Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow q$ est pair

donc $q = 2b$ ($b \in \mathbb{Z}$).

d) $\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ c.à.d $\frac{p}{q}$ non irréductible $\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. $r < r'$ $\quad x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$

a. $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ (évident) et $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ car $\sqrt{2} < 2$ $(2 < 4)$

$\Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

$r' - r > 0 \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) < r' - r$

$\Rightarrow r < r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) < r' - r + r = r' \iff r < x < r'$

b. D'après 1) et 2) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\frac{r' - r}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{r' - r}{2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

et $r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2}\left(\frac{r' - r}{2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow r + \sqrt{2}\left(\frac{r' - r}{2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Et donc x est un nombre irrationnel entre r et r'

c. <u>Entre 2 nombres rationnels il existe toujours un nombre irrationnel</u>

<u>Exercice 2</u>

1. $A_n = 0,2014\,2014\,2014\ldots 2014$ (n fois)

$= 2014\,2014 \ldots 2014 \times 10^{-4n}$. On pose $p = 2014 \ldots 2014$ (n fois) et $q = 10^{4n}$

alors $A_n = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

2. $A = 0,2014\,2014\ldots$ Remarquons que $10\,000\,A = 2014,2014\,2014\,2014\ldots$

Alors $10\,000\,A - A = 2014$

càd $9999\,A = 2014 \Rightarrow A = \frac{2014}{9999}$

3. $P = 0,111\ldots + 0.222\ldots + 0.333\ldots + \ldots + 0.999\ldots$

$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \ldots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\ldots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$

<u>Exercice 3</u>

$a = 27 + 6\sqrt{21}$ $\quad b = 27 - 6\sqrt{21}$

$a^{2/3} b^{1/3} + a^{1/3} b^{2/3} = a^{1/3 + 1/3} b^{1/3} + a^{1/3} b^{1/3 + 1/3}$

$= a^{1/3} a^{1/3} b^{1/3} + a^{1/3} b^{1/3} b^{1/3}$

$= a^{1/3} b^{1/3} [a^{1/3} + b^{1/3}]$

Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$\gamma^3 = 27 + 6\sqrt{21} + 3(27 + 6\sqrt{21})^{2/3}(27 - 6\sqrt{21})^{1/3} + 3(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}(27 - 6\sqrt{21})^{2/3} + 27 - 6\sqrt{21}$

$= 54 + 3\left[(27 + 6\sqrt{21})(27 - 6\sqrt{21})\right]^{1/3}\left[(27 + 6\sqrt{21})^{1/3} + (27 - 6\sqrt{21})^{1/3}\right]$

$= 54 + 3\,[729 - 756]^{1/3}.\gamma = 54 + 3\,(-27)^{1/3}.\gamma = 54 - 9\gamma$

γ est donc racine de l'équation : $x^3 + 9x - 54 = 0$

Racine évidente : $3 \Rightarrow x^3 + 9x - 54 = (x - 3)(x^2 + kx + 18)$

$= x^3 + kx^2 + 18x - 3x^2 - 3kx - 54$

$= x^3 + (k-3)x^2 + (18-3k)x - 54 \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow \quad x^3 + 9x - 54 = (x-3)(x^2+3x+18) \qquad x^2+3x+18 \quad \Delta = 9 - 4.18 < 0$

pas de racine réelle

La seule racine réelle est 3, donc $\gamma = 3$

Exercice 4 On suppose $x \geq 1 \Rightarrow$ les solutions seront nécessairement dans $[1, +\infty[$

1. On remarque que $x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-2.2\sqrt{x-1}+4 = (\sqrt{x-1}-2)^2$

$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1+9-2.3\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-3)^2$

Donc (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$ et $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$

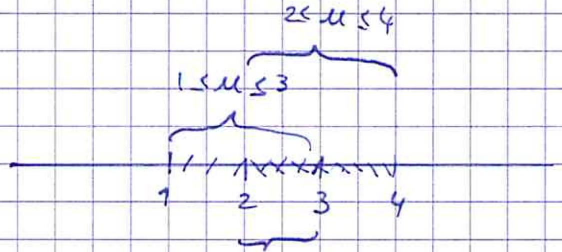
2. On pose $u = \sqrt{x-1}$.

Si $u \in \mathbb{R}$ est solution de (3) alors nécessairement

$|u-2| \leq 1$ et $|u-3| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq u-2 \leq 1 \qquad -1 \leq u-3 \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq u \leq 3 \qquad 2 \leq u \leq 4$



$\Rightarrow \quad 2 \leq u \leq 3$

Réciproquement : si $u \in \mathbb{R}$ et $u \in [2, 3]$ alors $|u-2| = u-2 \qquad u \geq 2 \Leftrightarrow u-2 \geq 0$

et $|u-3| = 3-u \qquad u \leq 3 \Leftrightarrow u-3 \leq 0$

et donc $|u-2| + |u-3| = u-2+3-u = 1$

alors u est solution de (3) si et seulement si $2 \leq u \leq 3$

3. Des questions 1) et 2) il résulte que x est solution de (1) si et seulement si

$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad 4 \leq x-1 \leq 9$

$\Leftrightarrow \quad 5 \leq x \leq 10$

Conclusion : Les solutions de (1) sont tous les réels de $[5 ; 10]$.

Exercice 5

1 a. $|x| - |y| \leq |x-y|$: $\qquad |x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

b. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

Si on écrit $2x = (x+y) + (x-y)$ et $2y = (x+y) - (x-y)$

alors $2|x| = |(x+y) + (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$

$+ \quad 2|y| = |(x+y) - (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$

$\Rightarrow \cancel{2}|x| + \cancel{2}|x| \leq \cancel{2}|x+y| + \cancel{2}|x-y|$

c. $1 + |xy-1| \leq (1 + |x-y|)(1 + |y-1|)$.

On pose $u = x-1$ et $v = y-1$

$\Rightarrow xy - 1 = xy + 1 - x - y + x - 1 + y - 1$

$= (x-1)(y-1) + x - 1 + y - 1$

$= uv + u + v$

$1 + |xy-1| = 1 + |uv + u + v|$

$\leq 1 + |u| + |v| + |uv|$

$\parallel$

$(1 + |u|)(1 + |v|) = (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

d. $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

on rappelle que si $a, b \in \mathbb{R}_+$ alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ et $|a|^2 = a^2$

ici $(|x| - |y|)^2 \leq (|x-y|)^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2|x||y| + y^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2$

$\Leftrightarrow -\cancel{2}|x|.|y| \leq -\cancel{2}xy \leq \cancel{2}|x|.|y|$ $\qquad$ or $|x|.|y| = |xy| = |-xy|$

$\Leftrightarrow -|xy| \leq -xy \leq |xy|$

$\Leftrightarrow -|-xy| \leq -xy \leq |-xy|$

si on pose $r = -xy$ on a $-|r| \leq r \leq |r|$

qui est vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$

- si $r \geq 0$ $\quad r = |r|$ et donc $r \leq |r|$ et $r \geq 0 \geq -|r|$
- si $r \leq 0$ $\quad r = -|r|$ et donc $r \geq -|r|$ et $r \leq 0 \leq |r|$

2. $A(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

$A(x+y) = \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} = \dfrac{1+|x+y|-1}{1+|x+y|} = 1 - \dfrac{1}{1+|x+y|}$

or $|x+y| \leq |x|+|y| \Rightarrow 1+|x+y| \leq 1+|x|+|y|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+|x+y|} \geq \dfrac{1}{1+|x|+|y|} \Rightarrow -\dfrac{1}{1+|x+y|} \leq -\dfrac{1}{1+|x|+|y|}$

et donc $g(x) \leq 1 - \dfrac{1}{1+|x|+|y|} = \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$

D'où $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|} + \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} = g(x)+g(x)$ car $|x| \leq |x|+|y|$

$1+|x| \leq 1+|x|+|y|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+|x|} \geq \dfrac{1}{1+|x|+|y|}$

Exercice 6

1)

a) $E(x+1) = E(x)+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $E(x) \leq x < E(x)+1$

$(E(x)+1) \leq x+1 < (E(x)+1)+1$ comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$ on a $E(x+1) = E(x)+1$

Or $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$ et on rappelle que si $n \leq x < n+1$ alors $E(x) = n$

par conséquent ici $E(x+1) = E(x)+1$

b. $\left.\begin{array}{l} E(x) \leq x < E(x)+1 \\ E(y) \leq y < E(y)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$

or $E(x+y)$ est le plus grand entier n t.q. $n \leq x+y$

Et donc puisque $E(x)+E(y) \leq x+y$ on a : $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$

De même $E(x+y)+1$ est le plus grand entier $m > x+y$

Puisque $E(x)+E(y)+2 > x+y$ on en déduit $E(x)+E(y)+2 \geq E(x+y)+1$

et donc $E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

Finalement $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

c. un peu plus compliqué :

on a plusieurs cas possibles : on va poser $k = E(x)$ et $l = E(y)$

alors $k \leq x < k+1$ et $l \leq y < l+1$

Comme on va utiliser $2x$ et $2y$, il faut voir si on sort de $[k, k+1[$ ou $[l, l+1[$

4 cas se présentent

① si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ alors $2x \in [2k, 2k+1[$

si $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$ " $2y \in [2l, 2l+1[$

$x+y \in [k+l ; k+l+1[$ $\quad [\underbrace{E(x)}_{k} + \underbrace{E(y)}_{l}] \leq E(x+y) < [\underbrace{E(x)}_{k} + \underbrace{E(y)}_{l}] + 1 \Rightarrow E(x+y) = E(x)+E(y)$

$E(x) + E(y) + E(x+y) = k + l + k + l$

$= 2k + 2l$

D'autre part $E(2x) = 2k$ et $E(2y) = 2l$ $\Rightarrow E(2x) + E(2y) = 2k + 2l$

Dans ce cas là $E(x) + E(y) + E(x+y) = E(2x) + E(2y)$

② si $x \in [k+\frac{1}{2} ; k+1[$ alors $2x \in [2k+1 ; 2k+2[$

$x \in [l, l+\frac{1}{2}[$ — $2y \in [2l ; 2l+1[$

$x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ $\Rightarrow E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$

et $E(x) + E(y) + E(x+y) = k+l+k+l$ ou $k+l+k+l+1$

$= 2k+2l$ ou $2k+2l+1$

D'autre part $\left.\begin{array}{l} E(2x) = 2k+1 \\ E(2y) = 2l \end{array}\right\} \Rightarrow E(2x) + E(2y) = 2k+2l+1$

Dans ce cas là $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

③ si $x \in [k ; k+\frac{1}{2}[$ $\quad y \in [l+\frac{1}{2} ; l+1[$

on a de façon identique $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$

④ $x \in [k+\frac{1}{2} ; k+1[$ $\quad y \in [l+\frac{1}{2} ; l+1[$

$E(x) + E(y) + E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x) + E(2y)$

Dans tous les cas $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$!!

d. • Supposons que $E(x) = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ ($E(x)$ pair)

on a : $2p \leq x < 2p+1 \Rightarrow p \leq \frac{x}{2} < p+\frac{1}{2}$ et $E(\frac{x}{2}) = p$

$< p+1$

Mais $p+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = p+1$

d'où $E(\frac{x+1}{2}) = p$

Finalement $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p = E(x)$

• Supposons que $E(x) = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$

On a $2p+1 \leq x < 2p+2$ d'où $\frac{2p+1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1$

c.a.d $p+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1$ et $E(\frac{x}{2}) = p$

Mais $p+1 = p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2}+\frac{1}{2} < p+1+\frac{1}{2} < (p+1)+1$

d'où $E(\frac{x+1}{2}) = p+1$

Finalement $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p+1 = E(x)$.

e. Comme $E(x) \leq x < E(x)+1$

$\underbrace{nE(x)}_{\text{entier}} \leq nx < n(E(x)+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$nE(x)$ est un entier $\leq nx$

et $E[nx]$ le plus grand entier $\leq nx$

d'où $n\,E(x) \leq E[nx] \leq nx < n(E(x)+1)$

$\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$

donc $\frac{E(nx)}{n}$ est un réel y t.q. $E(x) \leq y < E(x)+1$

donc $E(x) = E(y)$ autrement dit $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$

Exercice 7

1) • Si $x \geq y$ alors $\max(x,y) = x$ et $|x-y| = x-y$ donc $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x$ $\Big\}$ donc $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

de même $\min(x,y) = y$ et $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = y$ ok

• Si $x \leq y$ $\max(x,y) = y$ et $|x-y| = y-x$

$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y)$

de même $\min(x,y) = x$ et $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x = \min(x,y)$

2) Soit $z \in \mathbb{R}$ $\max(x,y,z) = \max(\max(x,y), z)$

D'après la formule précédente on a:

$$\max(x,y,z) = \frac{\max(x,y) + z + |\max(x,y) - z|}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}$$

Exercice 8.

$A = \{u = x^2+y^2 \; ; \; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \; , xy = 1\}$

1. Si $x = y = 1$, $xy = 1$ donc $A \neq \emptyset$

Comme $x^2+y^2 \geq 0$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ A est minorée par 0 donc possède une borne inférieure $\alpha \geq 0$

Comme $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq 0$ on a $x^2+y^2 \geq 2\underbrace{xy}_{=1} = 2$ pour $x,y \in A$

$\Rightarrow \inf(A) \geq 2$.

On remarque de + que pour $x = y = 1$, on a $xy = 1$ et $x^2+y^2 = 2$

et donc 2 est le plus petit élément de A, et $\inf(A) = 2$

2. Par l'absurde

Supposons que A admette une borne sup. M. alors pour tout $u = x^2+y^2 \in A$

$u \leq M$ or pour tout $x > 0$ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} \in A$ on aurait alors

pour tout $x > 0$ $\frac{x^4+1}{x^2} \leq M$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x^2} = +\infty$ donc A ne possède pas de borne supérieure

Exercice 9

1. $A \subset B$: pour tout $x \in A$ alors $x \in B$ et donc

VRAI

Par conséquent pour tout $x \in B$, $x \leq \sup(B)$

car tous les element de A sont dans B

Autrement dit $\sup(B)$ majore tous les elements de B $\Rightarrow$ c'est donc un majorant de A

Mais $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, donc $\sup(A) \leq \sup(B)$

2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ FAUX

$\underset{A}{\underset{\shortparallel}{[0,1]}} \subset \underset{B}{\underset{\shortparallel}{[-1,2]}}$ et $\inf A = 0$ $\inf B = -1$

Mais $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$ ok

si $A \subset B$, alors : pour tout $x \in A$, $x \in B$ $\inf(B)$ minore les elements de B

c'est donc un minorant de A car tous les element de A sont dans B

et $\inf A$ st le plus grand des minorants de A donc $\inf B \leq \inf A$

3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ VRAI

En effet : A et B étant bornées elles admettent des bornes sup et inf.

$\boxed{\leq}$ soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$ on a donc $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$

Autrement dit $x \leq \max(\sup A ; \sup B)$, et $\sup A \cup B$ est le + petit des majorants de $A \cup B$

donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\boxed{\geq}$ Supposons que $\sup A \geq \sup B$ ($\sup B \geq \sup B$ se fait de façon analogue)

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup A$, $\exists x \in A$ t.q. $\sup A - \varepsilon < x$

càd qu'il existe $x \in A \cup B$ t.q. $\max(\sup A, \sup B) (= \sup A) - \varepsilon < x$

et donc ~~max~~ $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

4 $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$ faux. On a égalité

ex: $A = [0,2]$ $B = [1,5]$

$\sup A = 2$ $\sup B = 5$ $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\} = [1,7]$

$\sup(A+B) = 7 = \sup A + \sup B$

. si $x \in A+B$ $x = a+b$, $a \in A$, $b \in B$ on a $x = a+b \leq \sup A + \sup B$.

donc $A+B$ est une partie (non vide) de $\mathbb{R}$ et majorée par conséquent $\sup(A+B)$ existe

et $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

. Supposons $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$

on pose $\alpha = \sup A + \sup B - \sup(A+B)$ alors $\alpha > 0$ (on avait montré $\alpha \geq 0$)

Par définition de $\sup B$, il existe $b \in B$ t.q. $\sup B - \alpha < b \leq \sup B$

càd $\sup(A+B) - \sup(A) < b$

ou encore $\sup(A+B) - b < \sup A$

Si on pose $\beta = \sup A - \sup(A+B) + b$ alors $\beta > 0$ d'après ↑, et donc

il existe $a \in A$ t.q. $\sup A - \beta < a \leq \sup A$

càd $\sup(A+B) - b < a$

$\Rightarrow$ $\sup(A+B) < a+b$ $\Rightarrow$ contradiction

$\Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

exercice : faire la même chose avec inf

5. $\inf(-A) = -\sup(A)$

. A bornée donc A majorée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall a \in A$ $a \leq M$

$\Rightarrow \forall a \in A$ $-a \geq -M$

et donc $-A$ est minorée et $\inf(-A)$ existe

En particulier $\forall a \in A$ $a \leq \sup(A)$ et $-a \geq -\sup(A)$ donc $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$. ($\Rightarrow \inf(-A) \geq -\sup(A)$) (inf est + grand des minorants)

Or, $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ t.q. $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$

donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists -a \in -A$ t.q. $-\sup(A) + \varepsilon > -a \geq -\sup(A)$

$\Rightarrow \inf(-A) = -\sup A$.

6. Reprendre le même raisonnement que (4) avec $B = \{x\}$ x fixé $\in \mathbb{R}$

7. Faux : si $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$ alors $AB = \{0, 2\}$

$\sup AB = 2$ et $\sup A . \sup B = 0$

Mais le resultat est vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$

soient $a \in A$ et $b \in B$

$0 \leq a \leq \sup A$ $\quad 0 \leq b \leq \sup B$

$\Rightarrow ab \leq \sup A \sup B$ $\quad \Rightarrow \sup A \sup B$ est un majorant de AB

$\Rightarrow \sup(AB) \leq \sup A \sup B$.

- On fixe maintenant $b \in B$ avec $b \neq 0$ (si $b = 0$ c'est evident)

comme $ab \leq \sup(AB)$ (et on suppose $A \neq \{0\}$ → sinon evident aussi)

$a \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$ $\Rightarrow \dfrac{\sup(AB)}{b}$ est majorant de A

$\Rightarrow \sup A \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$

$\Rightarrow b \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup A}$ $\quad \Rightarrow \sup B \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup A}$

$\Rightarrow \sup A \sup B \leq \sup(AB)$

conclusion $\sup(AB) = \sup A \sup B$

Exercice 10 : défis

1.a $\bullet\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

on en deduit que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ ce qui donne la 1ère inegalité

$\bullet\ \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

on en deduit que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ ce qui donne la 2ème inegalité

b. Ecrivons les inegalités obtenues en a. pour

$n=1 \quad 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} < \dfrac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}$ (1)

$n=2 \quad 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$ (2)

$n=3 \quad 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ (3)

...

$n=9999 \quad 2\sqrt{10000} - 2\sqrt{9999} < \dfrac{1}{\sqrt{9999}} < 2\sqrt{9999} - 2\sqrt{9998}$ (9999)

$n=1000 \quad 2\sqrt{10001} - 2\sqrt{10000} < \dfrac{1}{\sqrt{10000}} < 2\sqrt{1000} - 2\sqrt{9995}$ (1000)

En additionnant les lignes (1) à (9999) on obtient

$2\sqrt{10000} - 2\sqrt{1} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{9999}}$

cad $198 < S - \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$ ou encore $198 + \dfrac{1}{100} < S$ $(*)$

en additionnant les lignes (2) à (10000) on obtient

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{1000}} < 2\sqrt{10000} - 2\sqrt{1}$

cad $S - 1 < 198$ ou encore $S < 199$ $(**)$

$(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(S) = 198}$

2. On pose $D(x) = x - E(x)$

$\Rightarrow x = E(x) + D(x)$ et $0 \leq D(x) < 1$

d'où $nx = nE(x) + nD(x)$ et $0 \leq nD(x) < n$ (*)

Or par definition de la partie entière

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$$

$\Rightarrow E(nx) \leq nE(x) + nD(x) < E(nx) + 1$

$\Rightarrow \underbrace{E(nx) - nE(x) \leq nD(x)} < E(nx) - nE(x) + 1$

$$\Downarrow$$

$$E(nx) - nE(x) \leq nD(x) \underset{(*)}{<} n$$

$\Rightarrow E(nx) - nE(x) < n$

or $E(nx) - nE(x)$ est un entier, on a donc

$$E(nx) - nE(x) \leq n - 1$$

La 2ème inégalité montre que

$nD(x) - 1 < E(nx) - nE(x)$ et comme $nD(x) \geq 0$, on a

$$-1 < E(nx) - nE(x)$$

Comme $E(nx) - nE(x)$ est un entier on a necessairement

$$0 \leq E(nx) - nE(x)$$

D'où le resultat.

3. Avec la formule du binôme de Newton

a) $(2+\sqrt{3})^n = 2^n + n2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k + \dots + n.2(\sqrt{3})^{n-1} + (\sqrt{3})^n$

$(2-\sqrt{3})^n = 2^n - n2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + (-1)^k C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k + \dots + (-1)^{n-1} n.2(\sqrt{3})^{n-1} + (-1)^n\sqrt{3}$

On additionne membre à membre, les termes de puissances impairs de n s'annulent, seuls subsistent les termes de " pairs $k=2m$, de $\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est une somme de termes de la forme

$$2(-1)^{2m} C_n^{2m} 2^{n-2m}(\sqrt{3})^{2m} = 3^m . 2^{n-2m+1} C_n^{2m}$$

c'est à dire une somme d'entiers pairs (puisque $n-2m+1 \geq 1$)

b) On pose $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$ (on a une somme de termes >0)

On a successivement

$$1<3<4$$

$$1<\sqrt{3}<2 \Rightarrow 0<2-\sqrt{3}<1$$

$\Rightarrow 0<(2-\sqrt{3})^n<1$ càd $(2-\sqrt{3})^n - 1 < 0$

Donc $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n$ (1)

Comme $(2-\sqrt{3})^n > 0$ on a aussi $(2+\sqrt{3})^n < (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n <$ " + "

càd $2p-1 < (2+\sqrt{3})^n < 2p$

$\Rightarrow E((2+\sqrt{3})^n) = 2p-1$ qui est impair.

4. $A = \left\{ \frac{m}{mn+1},\ m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

A est minorée par 0 (en effet $m, n \in \mathbb{N}^*$ on a nécessairement $\frac{m}{mn+1} \geq 0$,

A est majorée par 1 (en effet: $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m, n \geq 1$

$\Rightarrow m.n \geq m$

$\Rightarrow mn+1 \geq mn \geq m$

$\Rightarrow \frac{m}{mn+1} \leq 1$)

Par conséquent A possède une borne inférieure α et une borne supérieure β telles que $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 1$

Supposons $\alpha > 0$: alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{mn+1} \geq \alpha$

en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1} \geq \alpha$ (si $m=1$) ou encore $1 \geq \alpha n + \alpha$

càd pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ce qui n'est pas possible pour tout n.

Donc $\alpha = 0$

Supposons $\beta < 1$ alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{mn+1} \leq \beta$

en particulier si $n=1$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{m+1} \leq \beta$ ou encore $m \leq \beta m + \beta$

càd, comme $1-\beta > 0$ " $m \in \mathbb{N}^*$ $m \leq \frac{\beta}{1-\beta}$ ce qui est impossible

Donc $\beta = 1$

Exercice 11

* La suite (2^n) tend notoirement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci empêche l'ensemble A d'être majoré. Si on est exigeant avec soi-même, on peut ajouter des détails -ce qui dans ce genre de contexte où les choses sont assez intuitives ne me semble pas indispensable- : pour chaque réel M il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait l'inégalité : $M+1 \leq 2^n$. Ceci entraîne en particulier qu'on a : $M < M+1 \leq 2^N$ alors que $2^N \in A$. Le réel M ne peut donc être un majorant de l'ensemble A. Puisque non majoré, A n'est pas non plus borné, n'a pas de plus grand élément ni de borne supérieure.

De l'autre côté, remarquons que la suite (2^n) est croissante et en particulier que pour tout $n \geq 0$, $1 = 2^0 \leq 2^n$. Le nombre 1 est donc un minorant de A et c'est un élément de A. L'ensemble A admet donc un plus petit élément, qui est 1. *A fortiori* il admet une borne inférieure, qui est 1, et il est minoré, par 1.

* L'ensemble B n'est autre que l'ensemble $\{-1, 1\}$, à peine camouflé. Il est clair que $-1 \in B$, que $1 \in B$ et que pour tout $b \in B$, $-1 \leq b \leq 1$. Ceci entraîne que B a un plus petit élément qui est -1 et un plus grand élément, qui est 1. *A fortiori*, il admet une borne inférieure, qui est -1, et une borne supérieure, qui est 1, il est minoré, par -1 et majoré, par 1 ; il est donc borné.

* La suite (4^k) tend notoirement vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Or elle est formée de points de C puisque pour tout k entier naturel, $4^k = ((-2)^2)^2 = (-2)^{2k}$. Comme pour A pas question que C soit majoré donc qu'il soit borné, qu'il admette un plus grand élément, qu'il admette une borne supérieure. De l'autre côté, on peut regarder la suite $-2(4^k)$ qui tend vers $-\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et qui est composée de points de C puisque pour tout k entier naturel, $-2(4^k) = (-2) \times (-2)^{2k} = (-2)^{2k+1}$. Ceci empêche C d'être minoré, il n'admet donc pas de plus petit élément ni même de borne inférieure.

* Du côté du plus grand élément, ça marche pareil que pour le plus petit élément de A : ce coup-ci on a une suite (strictement) décroissante, qui passe par tous les éléments de D. Chaque élément de D est donc plus petit (au sens large) que $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$. Le réel 1 est à la fois élément de D et plus grand que tous les éléments de D. C'est le plus grand élément de D, c'est donc aussi sa borne supérieure et D est majoré.

De l'autre côté, on remarque d'abord que chaque élément de D est clairement strictement positif et *a fortiori* positif. Le réel 0 minore donc tous les éléments de D. Ceci prouve que D est minoré et que 0 en est un minorant. Minoré et non vide, l'ensemble D admet une borne inférieure. Montrons enfin que D n'a pas de plus petit élément. S'il en avait un, celui-ci serait un élément de D donc de la forme $\left(\frac{1}{2}\right)^N$ pour un certain entier naturel N. Ce plus petit élément minorerait alors $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$ et on aurait l'inégalité :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

ce qui n'est pas du tout raisonnable - on a remarqué plus haut que la suite des puissances de 1/2 était strictement décroissante.

L'énoncé n'exige pas qu'on calcule la borne inférieure de D mais pourquoi s'en priver ? Notons la m. Puisque 0 est un minorant de D et que $\operatorname{Inf} D$ est plus grand (au sens large) que tous les minorants de D on peut dans un premier temps écrire que $0 \leq m$. Pour aller plus loin, on remarque que la borne inférieure d'un ensemble en est aussi un minorant et que donc, pour tout entier naturel n, $m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En passant à la limite dans cette inégalité large, on obtient $m \leq 0$. En rapprochant les deux inégalités, on conclut que $m = 0$. Bien sûr si on a fait ce travail, on n'a pas besoin de l'argument donné plus haut pour prouver que D n'a pas de plus petit élément : on peut aller plus vite en remarquant que si D avait un plus petit élément il serait égal à la borne inférieure de D donc à 0 et que ça ne colle pas puisque 0 n'est pas dans D.

Majoré et minoré, D est borné.

* Surprise ! E est beaucoup plus facile. On remarque en effet que pour tout $n \geq 0$, $-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ dont on déduit sans mal que $-\frac{1}{2}$ et 1 sont respectivement le plus petit élément et le plus grand élément de E. Ce sont donc aussi respectivement la borne inférieure et la borne supérieure. L'ensemble E est minoré, majoré, borné.

* Pour F on s'y prend de façon assez différente. Du côté des minorants, on remarque d'abord que 0 minore clairement F puisqu'il minore toute valeur prise par la fonction valeur absolue, et que par ailleurs 0 est dans F puisque c'est la valeur que prend $|x+3y|$ quand x vaut 6 et y vaut -2. On conclut que F a un plus petit élément, qui est 0 ; il a donc aussi une borne inférieure, qui est 0 et il est minoré. De l'autre côté, il faut être soigneux. On remarque d'abord que pour tous x et y dans les ensembles de l'énoncé, $x+3y \leq 6+3\times(-2) = 0$ donc qu'on dispose de la réécriture $|x+3y| = -x-3y$. Une fois ceci posé, on note que $-x \leq 0$ tandis que $-3y \leq 9$ donc $|x+3y| \leq 0+9 = 9$. Le réel 9 est donc un majorant de F ; c'est par ailleurs un élément de F puisque c'est la valeur prise par $|x+3y|$ quand x vaut 0 et y vaut -3. C'est donc le plus grand élément de F et aussi sa borne supérieure, et F est majoré. Minoré et majoré, F est borné.

* Pour G on encadre avec soin numérateur et dénominateur de l'expression qui participe à sa définition. En haut, quand x varie entre -1 et 2, son carré vaut au moins 0 -comme tout carré- et au plus $2^2 = 4$ d'où l'encadrement $0 < 1 \leq x^2+1 \leq 5$. En bas, comme la fonction $y \mapsto y^3$ est croissante, on obtient sans mal l'encadrement $-26 \leq y^3+1 \leq -7$, désagréablement casse-gueule par ses signes négatifs. Rapidement si on est expert, en plein d'étapes si on est prudent, on en déduit successivement que $0 < 7 \leq -(y^3+1) \leq 26$ puis que $0 < \dfrac{1}{26} \leq -\dfrac{1}{y^3+1} \leq \dfrac{1}{7}$. On multiplie ce dernier encadrement par celui obtenu plus haut pour x^2+1 -c'est jouable, tout est positif- et on lit :

$$\frac{1}{26} \leq -\frac{x^2+1}{y^3+1} \leq \frac{5}{7}$$

dans laquelle on change tous les signes en multipliant par -1 sans oublier de retourner les inégalités sur son élan et hop :

$$-\frac{5}{7} \leq \frac{x^2+1}{y^3+1} \leq -\frac{1}{26}.$$

Avec tous ces efforts on a identifié un minorant de F à savoir -5/7 et un majorant à savoir -1/26. Maintenant si on a suivi, on se rend bien compte que le premier est un élément de F parce qu'on l'obtient en prenant $x = 2$ et $y = -2$ tandis que le second est un élément de F parce qu'on l'obtient en prenant $x = 0$ et $y = -3$. On conclut que F est majoré, minoré, borné, qu'il a un plus petit élément qui est aussi une borne inférieure et qui vaut -5/7 et un plus grand élément qui est aussi une borne supérieure et qui vaut -1/26.

* Pour H il est dans un premier temps évident qu'il est minoré par $-\sqrt{2}$, majoré par $\sqrt{2}$ et donc borné. Comme ensemble borné non vide, H admet une borne inférieure qu'on va noter m et une borne supérieure qu'on va noter M . Détaillons le calcul de M celui de m étant similaire. Dans un premier temps, on remarque que $M \leq \sqrt{2}$ puisque $\sqrt{2}$ est un majorant de H tandis que M est le plus petit d'entre eux. Dans un second temps, on invente une suite (u_n) d'éléments de H qui tende vers $\sqrt{2}$. Qu'imaginer ? On peut par exemple prendre pour chaque u_n une valeur décimale approchée par défaut de $\sqrt{2}$ c'est-à-dire, si on aime écrire des formules, $u_n = 10^{-n}E(10^n\sqrt{2})$. On vérifie facilement que chacun de ces éléments u_n est positif et plus petit au sens large que $\sqrt{2}$ donc élément de H, fait dont on déduit l'inégalité $u_n \leq M$ (puisque M majore H il majore tous les u_n). Par ailleurs on montre tout aussi facilement que u_n tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers l'infini (si on ne me croit pas on écrira les détails - mais est-ce utile ? Partant de l'encadrement $E(10^n\sqrt{2}) \leq 10^n\sqrt{2} \leq E(10^n\sqrt{2})+1$ fourni par la définition de la partie entière on le multiplie par 10^{-n} pour obtenir $u_n \leq \sqrt{2} \leq u_n + 10^{-n}$ qu'on reécrit en le regroupant en $\sqrt{2}-10^{-n} \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et on appelle les gendarmes). Cette remarque étant faite, on fait tendre n vers l'infini dans l'inégalité $u_n \leq M$ pour en conclure $\sqrt{2} \leq M$. Comme on a depuis un moment déjà l'inégalité dans l'autre sens, on conclut que $\sqrt{2} = M$. La borne supérieure est enfin calculée. L'exercice 1 nous a montré que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, il ne l'est toujours pas quelques exercices plus loin ; donc M n'est pas élément de H, ce qui prouve que H n'a pas de plus grand élément.

Exercice 12

1) On traite chaque implication successivement.
* Sens direct : supposons donc l'ensemble des valeurs prises par f borné. Ceci signifie qu'il est majoré et minoré donc qu'il existe deux constantes réelles m et M telles que pour tout t réel on ait : $m \leq f(t) \leq M$. Soit t un réel. Si $0 \leq f(t)$, on peut en déduire que $|f(t)| = f(t) \leq M \leq \text{Max}(-m, M)$ tandis que si $f(t) \leq 0$, on peut en déduire que $|f(t)| = -f(t) \leq -m \leq \text{Max}(-m, M)$. Dans les deux cas on a montré l'inégalité $|f(-t)| \leq \text{Max}(-m, M)$ qui est donc valable pour tout t réel. Ceci montre que $|f|$ est bornée.
* Sens réciproque, qui est un peu plus facile : supposons l'ensemble des valeurs prises par $|f|$ majoré et notons M un majorant de cet ensemble. Alors pour tout t réel, on peut écrire l'encadrement :
$-M \leq -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)| \leq M$. Ceci prouve que f est minorée, par $-M$ et majorée, par M.

2) On pose bien sûr $I = [1, +\infty[$ et $f(t) = \ln(t+1) - \ln t + \sin t - 4e^{-t}$. On veut montrer que l'ensemble des valeurs prises par $|f|$ est un ensemble majoré. Pour cela on découpe $|f(t)|$ avec l'inégalité triangulaire et avec intelligence. L'usage de la première majore par une somme de valeurs absolues, l'usage de la seconde amène à laisser les logarithmes interagir l'un avec l'autre (car, se rend-on compte, si on les sépare ils ne se laissent plus majorer) et séparer le sinus et l'exponentielle qui, pas trop gros, se laissent bien gentiment majorer individuellement. On écrit ainsi, pour tout t réel supérieur ou égal à 1 la majoration :

$$|f(t)| \leq |\ln(t+1) - \ln t| + |\sin t| + 4|e^{-t}| = |\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)| + |\sin t| + 4e^{-t} = \ln(1 + \frac{1}{t}) + |\sin t| + 4e^{-t}.$$

Tenant compte des sens de variations de $t \mapsto 1/t$ et de $t \mapsto e^{-t}$ sur l'intervalle d'étude, on majore le logarithme par $\ln(1 + 1/1) = \ln 2$ et l'exponentielle par e^{-1} ; traitant de façon brutale mais standardisée la fonction trigonométrique on majore la valeur absolue du sinus par 1. On se retrouve *in fine* avec une majoration de $|f(t)|$ par une bien laide constante, laide mais indépendante de t. L'ensemble étudié est bien majoré.

Exercice 13

1) Pour tous entiers p et q de $\mathbf{N}^*$, $0 < p \leq pq < pq + 1$; en divisant par l'entier strictement positif $pq + 1$ on en déduit que $0 < \dfrac{p}{pq+1} < 1$. Les réels 0 et 1 encadrent bien l'ensemble A.

2) L'ensemble A n'est pas vide, il est minoré et majoré : il admet donc une borne inférieure et une borne supérieure. Le réel 0 est un minorant, il est donc plus petit que la borne inférieure ; le réel 1 est un majorant, il est donc plus grand que la borne supérieure.

3) Soit E une partie de $\mathbf{R}$ minorée, soit m un minorant de E et soit (u_n) une suite d'éléments de E, convergente vers le réel l. Pour chaque valeur de n, on dispose de l'inégalité $m \leq u_n$ puisque m minore E et que u_n est élément de cet ensemble. Faisons alors tendre n vers l'infini dans la dite inégalité : on obtient $m \leq l$.

4) On remarque dans un premier temps que pour chaque valeur fixée de q, le réel u_q est un élément de A puisqu'on l'obtient à partir de l'expression $\dfrac{p}{pq+1}$ en y faisant $p = 2$. On observe aussi que la suite (u_q) est une suite convergente et que sa limite est 0. En appliquant la question précédente au minorant $\text{Inf}\, A$, on obtient l'inégalité : $\text{Inf}\, A \leq 0$. On la rapproche du 2) et, bonheur, on a calculé $\text{Inf}\, A$: c'est zéro.

5) On fait comme au 4) en inventant cette fois la suite idoine, ça sera $v_p = \dfrac{p}{p+1}$ (prendre $q = 1$ dans la définition des éléments de A) : c'est une suite d'éléments de A qui est convergente, vers le réel 1. En refaisant le raisonnement du 3) pour l'adapter aux majorants, on en déduit que $1 \leq \text{Sup}\, A$. Et en rapprochant ça du 2) encore, on conclut que $\text{Sup}\, A = 1$.

Exercice 14

1) Oh la boulette ! Majorer un ensemble c'est le majorer par **un** réel, intuitivement parlant une **constante** réelle. Ici on a majoré chacune des valeurs d'une suite (u_n) par un réel **différent** ce qui est une bêtise classique : ce genre de majoration, souvent utile, ne permet pas de conclure que la suite est "majorée" ni que

l'ensemble des valeurs qu'elle prend est un ensemble “majoré”. C'est au niveau du “puisque majoré” que la preuve fausse proposée s'effondre : on n'a absolument pas réussi à majorer l'ensemble A.

2) C'est d'autant plus embêtant qu'on ait cru arriver à prouver que A était majoré qu'en fait c'était faux ! Si on va chercher la question suggérée, on a la minoration :

$$2\sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leq u_n.$$

Dans la sommation de gauche presque toutes les racines se simplifient et il reste :

$$2\sqrt{2n+1}-2\sqrt{n+1}\leq u_n$$

Notons $v_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}$ et cherchons à montrer que v_n tend vers l'infini avec n. Quand le cours aura avancé on aura des techniques rodées pour le faire, pour l'instant il faut bidouiller un peu artificiellement. Les quelques calculs ci-dessous peuvent surprendre, mais correspondent pourtant, dans une certaine mesure, à des automatismes à maîtriser : face à une différence de racines carrées on peut toujours à tout hasard multiplier en haut et en bas par l'exrpression conjuguée, face à une expression polynomiale dans un calcul de limite, on peut à tout hasard mettre le terme de plus haut degré en facteur. Exploitons ces automatismes :

$$\begin{aligned}v_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}&=\frac{(2n+1)-(n+1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1}}=\frac{n}{\sqrt{n(2+1/n)}+\sqrt{n(1+1/n)}}\\&=\frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{2+1/n}+\sqrt{1+1/n})}=\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2+1/n}+\sqrt{1+1/n})}.\end{aligned}$$

Dans cette nouvelle expression de v_n, le numérateur tend vers l'infini avec n tandis que le dénominateur tend vers une constante strictement positive (précisément $\sqrt{2}+1$ mais peu importe). La suite (v_n) tend donc vers l'infini avec n ; au vu de l'inégalité $2v_n\leq u_n$, la suite (u_n) en fait donc autant. Comme pour l'ensemble A de la première question du 11, aucune chance que l'ensemble de ses valeurs ne soit majoré. Vous n'y étiez pas arrivé ? Pas d'affolement, c'était vraiment une question difficile.

Exercice 15

1) Supposons A et B respectivement majorées par M et N. Par le théorème de Pythagore, la distance à l'origine du point de coordonnées (x,y) vaut $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$. Les valeurs absolues dans cette formule sont respectivement majorées par M et N : on en déduit que la distance à l'origine est majorée (au sens large) par $\sqrt{M^2+N^2}$. Dit géométriquement, c'est que l'ensemble E est contenu dans le disque de centre 0 ayant ce rayon.

2) Réciproquement supposons E contenu dans un disque. Soit (a,b) le couple de coordonnées du centre de ce disque et soit R son rayon. Il est facile de voir que les coordonnées de tout point du disque -et donc de tout point de E- sont contenues dans les intervalles respectifs $[a-R,a+R]$ et $[b-R,b+R]$. En écrivant quelques détails de plus, on conclut que les ensembles A et B sont respectivement majorés par $|a|+R$ et $|b|+R$.