Feuille 5 : Arithmétique

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 2 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 35 et ppcm 210.

Exercice 3 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 4 Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

Exercice 5 Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 6 Trouver toutes les solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{Z}^2$:

$$(a)\ 58x + 21y = 1 \qquad (b)\ 14x + 35y = 21 \qquad (c)\ 637x + 595y = 29$$

Exercice 7 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 9 Combien 15! admet-il de diviseurs dans $\mathbb{N}$?

Exercice 10 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 11 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Exercice 12 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 13 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 14 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 15 Trouver toutes les solutions du système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} n \equiv 13 & (\text{mod } 19) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 12). \end{cases}$$

Exercice 16 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ si n est impair.
2. Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$ si n est pair.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs.
   i) Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $(a+b+c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab+bc+ca)$.
   ii) Existe-il un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = ab+bc+ca$?

Exercice 18* Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que a^n+1 soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n}+1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 19* Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{i}$ est divisible par p pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.
2. Montrer par récurence que pour tout $a \in \mathbb{N}^\times$, l'entier $a^p - a$ est divisible par p.

Exercice 20*

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\times$ on a :
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right).$$
2. On pose $F_n = 2^{2^n}+1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 21 Donner la valeur en base dix des nombres suivants :

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;
3. $(1367)_8$;
4. $(1402)_5$.

Exercice 22 Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.

1. 255 en base deux ;
2. 1907 en base seize ;
3. 2016 en base sept ;
4. 2000 en base deux mille.

Feuille 5 : Arithmétique

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Solution

1. $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$. De quatre nombres consécutifs, un est divisible par 2 et un autre par 4, puisque les résidus modulo 4 sont 0, 1, 2 et 3. Leur produit est donc divisible par 8. De même, de trois nombres consécutifs, un est divisible par trois. Comme 8 et 3 sont premiers entre eux, le produit est divisible par 24.
2. $120 = 24 \cdot 5$. Les résidus modulo 5 de cinq nombres consécutifs sont 0, 1, 2, 3 et 4. Il y en a donc une qui est divisible par cinq. Comme 5 et 24 sont premiers entre eux, le produit de cinq nombres consécutifs est divisible par 120.

Exercice 2 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 35 et ppcm 210.

Solution

Soient a et b les deux nombres. Alors $a = 35a'$ et $b = 35b'$, $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $a'b' = \frac{210}{35} = 6 = 2 \cdot 3$. Alors on a comme solution pour (a', b') : $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et $(6, 1)$. Ce qui donne les solutions $(35, 210)$, $(70, 105)$, $(105, 70)$ et $(210, 35)$.

Exercice 3 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Solution

1. Soient a et b les deux nombres. Alors $a = 18a'$ et $b = 18b'$, $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $a' + b' = \frac{360}{18} = 20$. Il faut donc écrire 20 come somme de deux entiers premiers entre eux. Ils ne peuvent pas être divisibles par 2 ou 5, ce qui donne les solutions $(1, 19)$, $(3, 17)$, $(7, 13)$ et $(9, 11)$ pour (a', b') ou (b', a'), soit $(18, 342)$, $(54, 306)$, $(126, 234)$ et $(162, 198)$ pour (a, b) ou (b, a).
2. Soient a et b les deux nombres. Alors $a = 18a'$ et $b = 18b'$, $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $a'b' = 6480 = 18^2 \cdot 4 \cdot 5$. Alors on a comme solution pour (a', b') ou (b', a') : $(1, 20)$ et $(4, 5)$, ce qui donne les solutions $(18, 360)$, $(72, 90)$ pour (a, b) ou (b, a).

Exercice 4 Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

Solution

1. On a $210 = 48 \cdot 4 + 18$; $48 = 18 \cdot 2 + 12$; $18 = 12 + 6$; $12 = 6 \cdot 2$. Ainsi $\text{pgcd}(210, 48) = 6$.
   On remonte : $6 = 18 - 12 = 18 - (48 - 18 \cdot 2) = 18 \cdot 3 - 48 = (210 - 48 \cdot 4) \cdot 3 - 48 = 210 \cdot 3 - 48 \cdot 13$.
2. On a $237 = 81 \cdot 2 + 75$; $81 = 75 + 6$; $75 = 6 \cdot 12 + 3$; $6 = 3 \cdot 2$. Ainsi $\text{pgcd}(237, 81) = 3$.
   On remonte : $3 = 75 - 6 \cdot 12 = 75 - (81 - 75) \cdot 12 = 75 \cdot 13 - 81 \cdot 12 = (237 - 81 \cdot 2) \cdot 13 - 81 \cdot 12 = 237 \cdot 13 - 81 \cdot 38$.

Exercice 5 Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Solution

On travaille avec des résidus de valeur absolue minimale. On a $18480 = 9828 \cdot 2 - 1176$; $9828 = 1176 \cdot 8 + 420$; $1176 = 420 \cdot 3 - 84$; $420 = 84 \cdot 5$. Donc $\text{pgcd}(18480, 9828) = 84$. On remonte :
$84 = 420 \cdot 3 - 1176 = (9828 - 1176 \cdot 8) \cdot 3 - 1176 = 9828 \cdot 3 - 1176 \cdot 25 = 9828 \cdot 3 - (9828 \cdot 2 - 18480) \cdot 25 = 18480 \cdot 25 - 9828 \cdot 47$.

Exercice 6 Trouver toutes les solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{Z}^2$:

$$(a)\ 58x + 21y = 1 \qquad (b)\ 14x + 35y = 21 \qquad (c)\ 637x + 595y = 29$$

Solution

1. On a $58 = 21 \cdot 3 - 5$; $21 = 5 \cdot 4 + 1$. Donc $\text{pgcd}(58, 21) = 1$ et il y a une solution. On remonte : $1 = 21 - 5 \cdot 4 = 21 - (21 \cdot 3 - 58) \cdot 4 = 58 \cdot 4 - 21 \cdot 11$. Les solutions sont $(x, y) \in \{(4 + 21n, -11 - 58n) : n \in \mathbb{Z}\}$.
2. On a $35 = 7 \cdot 5$ et $14 = 7 \cdot 2$. Ainsi $\text{pgcd}(35, 14) = 7$; comme $7 \mid 21$ il y a une solution. En divisant par 7, le système est équivalent à $2x + 5y = 3$. Une solutions évidente est $(4, -1)$. Les solutions sont donc $(x, y) \in \{(4 + 5n, -1 - 2n) : n \in \mathbb{Z}\}$.
3. On a $637 = 595 + 42$; $595 = 42 \cdot 14 + 7$; $42 = 7 \cdot 6$. Donc $\text{pgcd}(637, 595) = 7$; comme $7 \nmid 29$ il n'y a pas de solution.

Exercice 7 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Solution

1. $10b - b = 1\,111\,101$. Donc $1\,111\,111\,111 = 123\,456\,789 \cdot 9 + 10$.
2. $p = \text{pgcd}(1\,111\,111\,111, 123\,456\,789) = \text{pgcd}(123\,456\,789, 10) = 1$, puisque $123\,456\,789$ est divisible ni par 2 ni par 5.
3. On a $1 = 10 \cdot 12\,345\,679 - 123\,456\,789 = (1\,111\,111\,111 - 123\,456\,789 \cdot 9) \cdot 12\,345\,679 - 123\,456\,789$ $= 1\,111\,111\,111 \cdot 12\,345\,679 - 123\,456\,789 \cdot 111\,111\,112$. On a donc $u = 12\,345\,679$ et $v = 111\,111\,112$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Solution
On divise par 45 : Le système est équivalent à $37x + 23y = 1$. On a $37 = 23 \cdot 2 - 9$; $23 = 9 \cdot 2 + 5$; $9 = 5 \cdot 2 - 1$. Donc $\text{pgcd}(37, 23) = 1$ et il y a une solution. On remonte :
$1 = 5 \cdot 2 - 9 = (23 - 9 \cdot 2) \cdot 2 - 9 = 23 \cdot 2 - 9 \cdot 5 = 23 \cdot 2 - (23 \cdot 2 - 37) \cdot 5 = 37 \cdot 5 - 23 \cdot 8$. Les solutions sont donc $(x, y) \in \{(5 + 23n, -8 - 37n) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 9 Combien 15! admet-il de diviseurs dans $\mathbb{N}$?

Solution
On décompose 15! en facteurs premiers. On constate aisément que ses facteurs seront exactement $2, 3, 5, 7, 11, 13$. De 1 à 15, il y a 7 nombres pairs. Donc 2 apparaît au moins 7 fois. Il y a aussi 3 multiples de $2^2 = 4$. Donc 2 apparaît 3 fois de plus (au moins 10 fois). Il y a aussi 1 multiple de $2^3 = 8$. Donc 2 apparaît 1 fois de plus (au moins 11 fois). Il n'y a pas de multiples de plus grandes puissances de 2. Donc 2 apparaît exactement 11 fois. On fait de même avec 3 : il y a 5 multiples de 3, 1 seul multiple de $3^2 = 9$, et pas de puissance plus grande, donc 3 apparaît exactement 6 fois. Avec ce raisonnement, 5 apparaît exactement 3 fois, 7 apparaît exactement 2 fois, 11 et 13 apparaîssent exactement 1 fois chacun.
Donc $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Ainsi, il y a $12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ possibilités pour les diviseurs positifs. On en déduit que 15! a 4032 diviseurs positifs.

Exercice 10 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Solution
D'abord, on remarque que si a et b sont premiers entre eux, aussi a^2 et b^2 le sont.
Soit d un diviseur commun de ab et de $a + b$. Alors d divise $a(a + b) - ab = a^2$. De même d divise b^2. D'après la remarque précédente, les entiers a^2 et b^2 sont premiers entre eux. Ainsi $d = \pm 1$, ce qui conclut.

Exercice 11 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Solution

1. $(2^{ab} - 1) = (2^a - 1)(2^{ab-a} + 2^{ab-2a} + \ldots + 2^a + 1)$.

2. Si p n'est pas premier, alors $p = ab$ avec a et b deux entiers strictement supérieurs à 1 . Par le point 1, on déduit que $(2^p - 1)$ n'est pas premier.
3. D'après 1., $2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1 | \text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1)$. D'autre part, il existe $u, v \in \mathbb{N}^\times$ de signes différents tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$. On suppose sans perte de généralité que $u < 0 < v$. D'après 1., $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) | \text{pgcd}(2^{-au} - 1, 2^{bv} - 1)$. Or $\text{pgcd}(2^{-au} - 1, 2^{bv} - 1) = \text{pgcd}(2^{-au} - 1, 2^{bv} - 2^{-au}) = \text{pgcd}(2^{-au} - 1, 2^{-au}(2^{bv+au} - 1)) = \text{pgcd}(2^{-au} - 1, 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1)$ car $2^{-au} - 1$ est impair. Donc $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) | 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$. D'où le résultat.

Exercice 12 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Solution
Les résidus modulo 4 des carrés des nombres $0, 1, 2, 3$ sont 0 et 1.
En utilisant la propriété

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

on déduit que pour tout n entier naturel, $n^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. Ceci implique que le résidu de tout nombre naturel qui est somme de deux carrées d'entiers ne peut jamais être égale à 3.

Exercice 13 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Solution

$$7 \equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow 7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 8 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 8 & \text{si } n \text{ est impair;} \\ 2 \pmod 8 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 14 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Solution
D'abord on note que $100 \equiv 9 \pmod{13}$. On en déduit que $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$.
Comme 13 est premier et 9 n'est pas divisible par 13, le petit théoreme de Fermat implique que

$$9^{12} \equiv 1 \pmod{13}.$$

Comme $1000 \equiv 4 \pmod{12}$, on obtient

$$9^{1000} \equiv 9^4 \equiv (-4)^4 \equiv (16)^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{13}.$$

Exercice 15 Trouver toutes les solutions du système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} n \equiv 13 & \pmod{19} \\ n \equiv 6 & \pmod{12}. \end{cases}$$

Solution
Une solution particulière évidente du système est $n = -6$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, l'ensemble des solutions est donné par $\{-6 + 228k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 16 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Solution

1. $7 = 4 \cdot 1 + 3$ est premier, donc $X \neq \emptyset$.
2. $(4h + 1)(4k + 1) = 4(4hk + h + k) + 1 = (4g + 1)$.

3. On rappelle que tous les nombres premiers supérieurs à 2 sont de la forme $4k \pm 1$.
   Considérons la factorisation en nombres premiers de a, $a = q_1 \cdots q_t$, où $q_i = 4k+1$ ou $4k+3$. Si tous les q_i sont de la forme $4k+1$, alors (par le point précédent) a serait aussi de la forme $4g+1$, ce qui est absurde.
4. Donc il existe au moins un diviseur q_j de la forme $4k+3$ avec q_j different de $p_1, \ldots, p_n$. Ce qui montre que X est infini.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ si n est impair.
2. Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$ si n est pair.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs.
   i) Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $(a+b+c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab+bc+ca)$.
   ii) Existe-il un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = ab+bc+ca$?

Solution

1. Pour tout entier n entre 0 et 7, on vérifie l'énoncé par un simple calcul. Ensuite, on conclut en utilisant la propriété (1), (voir solution de l'Exercice 12).
2. De même.
3. i) $a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 3 \pmod 8$ et $(a+b+c)^2 \equiv 1 \pmod 8$ car $a+b+c$ est impair. On en déduit que,
$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 1-3 \equiv -2 \equiv 6 \pmod 8.$$
   ii) Non, un tel enter n'existe pas. Soit $ab+bc+ca \equiv k \pmod 8$. Comme $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$, alors $2k \equiv 6 \pmod 8$, donc $k \equiv 3$ ou $k \equiv 7$. On conclut par les points 1 et 2.

Exercice 18* Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que a^n+1 soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n}+1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Solution
On écrit $n = 2^k m$ avec m impair, et $b = a^{2^k}$. Par l'absurde, on suppose $m > 1$. Comme m est impair, $a^n+1 = (b+1)(b^{m-1} - b^{m-2} + \cdots - b + 1)$. Absurde car a^n+1 est premier. Donc $m = 1$, et ainsi $n = 2^k$. Ceci ne nous dit pas, *a priori*, que la conjecture est vraie. On teste : $2^{2^0}+1 = 3$, $2^{2^1}+1 = 5$, $2^{2^2}+1 = 17$, $2^{2^3}+1 = 257$, $2^{2^4}+1 = 65537$ sont premiers. Mais $2^{2^5}+1 = 4294967297$ n'est pas premier.

Exercice 19* Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{i}$ est divisible par p pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.
2. Montrer par récurence que pour tout $a \in \mathbb{N}^\times$, l'entier $a^p - a$ est divisible par p.

Solution

1. p ne divise pas $i!(p-i)!$ car p est premier, $i < p$ et $p-i < p$. Mais p divise $p!$. Donc p divise $\binom{p}{i}$.
2. Initialisation triviale. Pour l'hérédité, on remarque que $(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i$. Ainsi, si $p | a^p - a$, on utilise 1. pour montrer que $p | (a+1)^p - (a+1)$.

Exercice 20*

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\times$ on a :
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right).$$
2. On pose $F_n = 2^{2^n}+1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Solution

1. Il faut faire la récurrence sur k.
   Initialisation : $(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) = (2^{2^n})^2 - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1$.
   Hérédité : Supposons la propriété vraie en un k fixé. Alors
   $\left(2^{2^n}-1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k} \left(2^{2^{n+i}}+1\right) = (2^{2^{n+k}}+1)\left(2^{2^n}-1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}}+1\right) = (2^{2^{n+k}}+1)(2^{2^{n+k}}-1)$.
   Et $(2^{2^{n+k}}+1)(2^{2^{n+k}}-1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1$. D'où le résultat.
2. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $n < m$ tels que F_n et F_m ne sont pas premiers entre eux. On pose $k = m - n \in \mathbb{N}^\times$ pour avoir $m = n + k$. Il existe p premier tel que $p|F_n$ et $p|F_{n+k}$. Comme $p|2^{2^n}+1$, par 1., on a $p|2^{2^{n+k}}-1$. Or $p|2^{2^{n+k}}+1$, donc $p|2$, donc $p = 2$. Absurde car F_n est impair.
3. $F_n \geq 2$, donc il existe p_n premier tel que $p_n|F_n$. D'après 2., pour $m \neq n$, $p_m \neq p_n$. Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers (les p_n).

Exercice 21 Donner la valeur en base dix des nombres suivants :

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;
3. $(1367)_8$;
4. $(1402)_5$.

Solution

1. $2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 1 = 425$
2. $3^8 + 3^7 + 3^5 + 3^3 + 1 = 9019$
3. $8^3 + 3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7 = 759$
4. $5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 = 227$

Exercice 22 Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.

1. 255 en base deux ;
2. 1907 en base seize ;
3. 2016 en base sept ;
4. 2000 en base deux mille.

Solution

1. $255 = 2^8 - 1 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = (11111111)_2$
2. On estime aisément que $16^2 < 1907 < 16^3$. On calcule $16^2 = 2^8 = 256$. On effectue la division euclidienne de 1907 par 256 : $1907 = \mathbf{7} \cdot 256 + 115$. Puis on effectue la division euclidienne de 115 par 16 : $115 = \mathbf{7} \cdot 16 + \mathbf{3}$. Donc $1907 = (\mathbf{773})_{16}$.
3. On estime aisément que $7^3 < 2016 < 7^4$. On calcule $7^3 = 343$. On effectue la division euclidienne de 2016 par 343 : $2016 = \mathbf{5} \cdot 343 + 301$. Puis on effectue la division euclidienne de 301 par $7^2 = 49$: $301 = \mathbf{6} \cdot 49 + 7$. Et $7 = (\mathbf{10})_7$. Donc $2016 = (\mathbf{5610})_7$.
4. $2000 = (10)_{2000}$