Feuille 8 : Suites réelles

Exercice 1 (a) Donner explicitement un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
(b) Expliquer comment écrire les nombres rationnels positifs sous la forme d'une liste sans répétitions.

Exercice 2 [**Monotonie**] Lesquelles des suites suivantes sont monotones ?

$$a_n = n^2 - e^n \ ; \ b_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n) \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ c_n = n^n + (-1)^n \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ d_n = n^n - n! \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 3 [**Limites de suites**]

1. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\frac{n}{n+1} \ ; \ \frac{3n-1}{2n+3} \ ; \ \frac{3n^2-1}{5n+3} \ ; \ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \ ; \ 1+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{3}\right)^n \ ; \ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \ ; \ n\cos n + 2n.$$

2. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$n-\sqrt{(n+a)(n+b)} \ (a,b \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{3\sqrt{n}+2\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3}+2\sqrt{n+1}} \ ; \ \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ n^{-2+(-1)^n} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\cos(\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}) \ (a \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{E(na)}{n} \ (a \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \ ; \ n^{1/n} - n^{1/(n+1)} \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 4 (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers l et l' avec $l < l'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n < v_n$.
(b) Si $u_n \to l < l'$, alors partir d'un certain rang $u_n < l'$.

Exercice 5 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a, v_n \leq b, \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}.$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 6 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

(a) Montrer que si $l < 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(b) Montrer que si $l > 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 8 Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$$

Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 9 Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :
(a) $u_n = (1 + 1/n)^n$, (c) $u_n = (\sin 1/n)^{1/n}$
(b) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$, (d) $u_n = ((n-1)/(n+1))^n$.

Exercice 10 Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Exercice 11 Soit $p \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}.$$

(b) Montrer par récurrence

$$S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)u_{n+1}).$$

(c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (n + p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
(d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p.

Exercice 12 [**Suites récurrentes**]

A On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 \in \mathbb{R}$ arbitrairement fixé, et $a_n = \dfrac{a_{n-1} + n}{n + 1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle est convergente. Quelle est la limite ?
2. Déterminer a_n en fonction de n.

B On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{a_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $a_n \geq \sqrt{n}$ alors $a_{n+2} \geq \sqrt{n+2}$.
2. Déduire du premier point que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \sqrt{n}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$. Qu'est-ce que vous en concluez pour la convergence de (a_n) ?

C On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 7$ et $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$ est croissante. Déterminer l'image de l'intervalle $[0, 7]$ par f.
2. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

D On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 \in [0, 1]$ et $a_n = \dfrac{3 - a_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On introduit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3 - x^2}{2}$. Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ par f.
2. En considérant les solutions de l'équation $f \circ f(l) = l$, montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

E On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1/2$ et $a_n = (1 - a_{n-1})^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $I = [0, 1]$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto (1-x)^2$ est décroissante sur I, et trouver $f(I)$.
2. Montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

F* On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = \frac{\pi}{3}$ et $a_n = \frac{\pi}{2}\cos^2(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite ne converge pas.

G* Etudier suivant les valeurs de a_0, la limite de la suite définie par $a_n = (a_{n-1}^2 + 1)/2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 Soit $\alpha > 0$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}.$$

(a) Montrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \to 0$ tandis que si $\alpha < 1$, $u_n \to +\infty$.
(b) Montrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.
(c) Toujours dans le cas $\alpha = 1$, et en exploitant l'encadrement $ln(1+x) \leq x \leq -ln(1-x)$ valable pour tout $x \in [0; 1[$, établir $u_n \to ln(2)$.

Exercice 14 (a) Etablir que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(1+x) \leq x.$$

(b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 15 Soit (u_n) une suite croissante de limite l. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

(a) Montrer que (v_n) est croissante.
(b) Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
(c) En déduire que $v_n \to l$.

Exercice 16 [**Somme harmonique**] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 17 [**Irrationalité du nombre de Néper**] Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}.$$

(a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet que leur limite commune est la constante de Néper (ou Euler) e. On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $a_q < e < b_q$, puis obtenir une contradiction.

Exercice 18 On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 19 Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
(a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
(b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 20 Établir

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

Exercice 21 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

Exercice 22 [**Théorème de Ramsey**] On va montrer : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est monotone.
On appelle x_m un pic si $n \geq m \Rightarrow x_m \geq x_n$. (i.e aucun terme à droite de x_m n'est plus grand que x_m).
(a) Si X a une infinité de pics, construire une suite monotone.
(b) Faire de même si X n'a qu'un nombre fini (peut-être aucun) $x_{m_1}, ..., x_{m_r}$ de pics.
(c) Conclure.

Exercice 23 [**Bolzano-Weierstrass**] On va montrer : De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite qui tend vers une limite finie.
Méthode 1 : Utiliser l'exercice précédent.
Méthode 2 : Soit (u_n) une suite de réels telle que

$$-M \leq u_n \leq M, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et un réel } M.$$

(a) Construire une function $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que

$$a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n, \text{ pour tout } \in \mathbb{N}.$$

(b) Conclure.

Feuille 8. Suites réelles

– corrigé –

Exercice 1.

(a) $\varphi(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$

(b) Une possibilité : $\underbrace{0/1}_{\ell_1}, \underbrace{1/1}_{\ell_2}, \underbrace{1/2, 2/1}_{\ell_3}, \underbrace{1/3, 3/1}_{\ell_4}, \ldots$, la liste ℓ_j comportant les quotients de la forme p/q, avec $p+q=j$ et p premier avec q, dans l'ordre croissant des p.

Exercice 2.

1. Montrer que $a_{n+1} < a_n$ revient à $(e-1)\,e^n > 2n+1$. Ceci s'obtient en combinant $e-1 > 1,5$ et $e^n \geq (1+1,5)^n \geq 1+1,5\,n$.
2. On a $b_{n+1} > b_n$ car $b_n > 0$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2\,(2n+1) > 1$.
3. $c_{n+1} > c_n$ revient à $(n+1)^{n+1} - n^n > 2\,(-1)^n$. Comme $2\,(-1)^n \leq 2$, il suffit de montrer que $(n+1)^{n+1} - n^n > 2$. Ceci suit de $(n+1)^{n+1} = n^{n+1} + (n+1)\,n^n + \cdots + 1 \geq n^n + (n+1) + 1 > n^n + 2$.
4. L'inégalité $d_{n+1} > d_n$ équivaut à $(n+1)^{n+1} - n^n > n \cdot n!$. Or, $(n+1)^{n+1} - n^n > (n+1)\,n^n - n^n = n^n$, et il suffit de remarquer que $n^n \geq n!$, ce qui s'obtient en comparant facteur par facteur les produits $n^n = n \cdot n \cdots n$ et $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Exercice 3. 1. Les quatre premières limites sont « du cours » et valent respectivement 1, $3/2$, ∞ et 0.

La cinquième vaut $3/2$, et se calcule à partir de la somme de la suite, qui vaut $\dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}$.

La sixième vaut 0 et s'obtient soit par accroissements finis (la méthode la plus apte à servir « en général »), soit en notant que l'expression de l'énoncé vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Enfin, la septième limite vaut ∞, ce qui suit de $n\,\cos n + 2\,n \geq -n + 2\,n = n$.

2. Les trois premières limites sont des variations sur le thème « on met en facteur le terme le plus significatif ».

Pour la première, on a

$$n - \sqrt{(n+a)\,(n+b)} = \frac{(a+b)\,n + ab}{n + \sqrt{(n+a)\,(n+b)}} \to \frac{a+b}{2} \text{ quand } n \to \infty$$

(on met en facteur n).

La deuxième limite vaut $5/3$ (on met en facteur $\sqrt{n}$). La troisième 1 (on écrit par exemple

$$\ln(n + \ln n) = \ln \left[n \left(1 + \frac{\ln n}{n} \right) \right] = \ln n + o(1) = \ln n\,(1 + o(1)) \text{ quand } n \to \infty).$$

Pour la quatrième, on note que $0 < n^{-2+(-1)^n} \leq n^{-1}$, ce qui donne la limite 0.

Suivant. Pour n suffisamment grand, la valeur absolue est inutile. Pour un tel n, on écrit

$$\sqrt{|a + b\,n + 4\,n^2\,\pi^2|} = \sqrt{a + b\,n + 4\,n^2\,\pi^2} = 2\,n\,\pi + x_n,$$

et on vérifie que $x_n \to \dfrac{b}{4\,\pi}$ quand $n \to \infty$. On obtient, pour n suffisamment grand,

$$\cos\left(\sqrt{|a + b\,n + 4\,n^2\,\pi^2|}\right) = \cos(2\,n\,\pi + x_n) = \cos x_n \to \cos\frac{b}{4\,\pi} \text{ quand } n \to \infty.$$

Les trois limites qui suivent sont sur le thème « encadrement ». Pour la première, l'encadrement $a - 1/n \leq \dfrac{E(na)}{n} \leq a$ donne le résultat a.

La deuxième vaut 2 et s'obient via

$$\frac{2\,n+1}{\sqrt{n^2 + 2\,n + 1}} \leq \sum_{i=1}^{2\,n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}} \leq \frac{2\,n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

De même, l'encadrement

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

montre que la troisième limite vaut 1.

En écrivant, pour les deux dernière limites :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp(n^2\ \ln(1 - 1/(n+1)) \text{ et } n^{1/n} - n^{1/(n+1)} = \exp(\ln n/n) - \exp(\ln n/(n+1)),$$

et en utilisant, pour la première, la limite fondamentale $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on trouve que la première limite vaut 0, et la seconde 0.

Exercice 4. (a) On a $v_n - u_n \to l' - l$. Soit $\varepsilon := (l' - l)/2 > 0$. Pour n_0 convenable on a $v_n - u_n - (l' - l) > -\varepsilon, \forall\, n \geq n_0$, d'où $u_n < v_n - \varepsilon < v_n$.
(b) Pendre $v_n \equiv l'$ dans la question précédente.

Exercice 5. On a

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

d'où (par encadrement) $u_n \to a$. De même, $v_n \to b$.

Exercice 6. L'inégalité $x^2+4\,x\,y+4y^2 \geq 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, s'écrit aussi $x^2 \leq (4/3)\,(x^2+xy+y^2)$, ce qui donne

$$|u_n| = \sqrt{u_n^2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{u_n^2 + u_n\,v_n + v_n^2} \to 0 \text{ quand } n \to \infty\,;$$

on trouve que $u_n \to 0$, et de même $v_n \to 0$.

Exercice 7. (a) Soit $r \in]l, 1[$. D'après l'exercice 4, il existe n_0 tel que $u_n < r, \forall\, n \geq n_0$. Par récurrence immédiate, pour $n \geq n_0$ on a

$$0 < u_n \leq u_{n_0}\, r^{n-n_0} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

d'où $u_n \to 0$.
(b) Similaire (prendre $r \in]1, l[$ et changer le sens des inégalités).

Exercice 8. On a $|u_{n+1}|/|u_n| \to 0$. D'après l'exercice précédent, $|u_n| \to 0$. D'où $u_n \to 0$.

Exercice 9. Le thème commun aux questions (a), (b) et (d) est d'utiliser l'écriture exponentielle et d'utiliser éventuellement la limite fondamentale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. On trouve respectivement e, 1 et e^{-2}.

Pour (c), le plus simple est d'utiliser l'écriture

$$(\sin 1/n)^{1/n} = \left(\frac{\sin 1/n}{1/n}\right)^{1/n} \exp(-\ln n/n)$$

pour montrer que la limite vaut 1.

Exercice 10. Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ étant croissants (en k) jusqu'à $E(n/2)$ et décroissants à partir de $E(n+1/2)$, on trouve, pour $n \geq 4$,

$$\binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{n}^{-1} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} \leq \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + (n-3)\binom{n}{2}^{-1} + \binom{n}{n-1}^{-1} + \binom{n}{n}^{-1}.$$

Par encadrement, la limite vaut 2.

Exercice 11. (a) Immédiat, à partir de $u_n = \dfrac{n!\,p!}{(n+p)!}$.
(b) La formule se vérifie pour $n = 1$. Le passage de n à $n+1$ se fait via

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + u_{n+1} &= \frac{1}{p-1}\,(1 - (n+p+1)\,u_{n+1}) + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+2)\,u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+1)\,u_{n+2}). \end{aligned}$$

(c) On a $v_n = \dfrac{p!}{(n+1)\cdots(n+p-1)} \to 0$ quand $n \to \infty$.
(d) Des deux question précédentes,

$$S_n = \frac{1}{p-1}\,(1 - v_{n+1}) \to \frac{1}{p-1} \text{ quand } n \to \infty.$$

Exercice 12.

A Faisons les deux questions en même temps. La récurrence se réécrit $(n+1)(a_n - 1) = a_{n-1} - 1$, d'où $b_n := a_n - 1$ vérifie $b_n = b_0/(n+1)!$. On obtient $a_n = 1 + \dfrac{a_0 - 1}{(n+1)!}$, ce qui donne une suite monotone (la monotonie dépendant du signe de $a_0 - 1$) et convergente vers 1.

B 1 On a

$$a_n \geq \sqrt{n} \implies a_{n+1} \leq 1 + \sqrt{n} \implies a_{n+2} \geq 1 + \frac{n+1}{1+\sqrt{n}} = \frac{n+2+\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}.$$

Il suffit de montrer que $\dfrac{n+2+\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+2}$, ce qui revient à

$$(n+2)^2 + n + 2\,(n+2)\,\sqrt{n} \geq (n+2)\,\left(1 + n + 2\,\sqrt{n}\right),$$

ou encore à $2\,n + 2 \geq 0$.

2 Il suffit de montrer que $a_1 \geq 1$ et que $a_2 \geq \sqrt{2}$, ce qui est clair.

3 Posons $b_n := a_n/\sqrt{n}$. Alors $b_n \geq 1$, et par ailleurs la relation de récurrence donne

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Par encadrement, $b_n \to 1$. Par conséquent, $a_n \to \infty$, mais cette information suit plus simplement de $a_n \geq \sqrt{n}$.

C 1 Clair et $[\sqrt{2}, 3]$ (qui est une partie de $[0, 7]$).

2 De ce qui précède et par récurrence, $a_n \in I := [0, 7]$, $\forall\, n$.
On a $|f'(x)| \leq 1/(2\,\sqrt{2}) < 1$ dans I. Il s'ensuit que $a_n \to \ell$, avec $\ell := 2$ l'unique point fixe de f dans I.

D 1 Clair et $[0, 3/2] \subset I := [0, \sqrt{3}]$.

2 Posons $g := f \circ f : I \to I$ et $h(x) := x - g(x)$, de sorte que $a_{n+2} = g(a_n)$ et $a_n - a_{n+2} = h(a_n)$.
f étant strictement décroissante, g est strictement croissante. On note que 1 est point fixe de f, donc de g. On obtient (avec ? l'un des « $\leq$ », « $\geq$ »)

$$a_n \,?\, 1 \implies a_{n+2} = g(a_n) \,?\, g(1) = 1.$$

Ainsi, les termes de rang impair sont tous du même côté de 1, et de même pour les termes de rang pair.
En notant les racines évidentes 1 de h, puis 1 de $h/(x-1)$, etc., on arrive à $h(x) = \dfrac{(x-1)^3\,(x+3)}{8}$. En particulier, 1 est le seul point fixe de g dans I.
Par ailleurs, sur I, le signe de h est celui de $x-1$. On obtient alors par récurrence : si $a_0 \,?\, 1$, alors $a_{2n} \,?\, a_{2n+2} \,?\, 1$. De ce qui précède, $a_{2n} \to 1$. De même, $a_{2n+1} \to 1$.
Finalement, $a_n \to 1$.

E
1. Clair et I.
2. On suit la trame de la question précédente. Avec des notations analogues, on a $g(x) = x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2$, $h(x) = x - 4\,x^2 + 4\,x^3 - x^4$. g est strictement croissante, et $h(x) = x\,(1-x)\,(x-\ell)\,(x-L)$, avec $\ell = (3-\sqrt{5})/2 \in I$ et $L = (3+\sqrt{5})/2 > 1$. Par ailleurs, on a $f(\ell) = \ell$ et $g(\ell) = \ell$.
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient que le signe de $a_{n+2} - \ell$ est celui de $a_n - \ell$. De même, le signe de $a_n - a_{n+2}$ est opposé à celui de $a_n - \ell$.
Avec la donnée $a_0 = 1/2$, on obtient que $\ell < 1/2 = a_0 < a_2 < \cdots < 1$, et donc la suite (a_{2n}) converge vers une limite ℓ_1 telle que $g(\ell_1) = \ell_1 \in [1/2, 1[$ (ou encore $h(\ell_1) = 0$). On trouve $\ell_1 = 1$.
En partant de $a_1 = 1/4 < \ell$, on obtient de même $\ell > a_1 > a_3 > \cdots > 0$, et comme ci-dessus $a_{2n+1} \to 0$.
Finalement, $a_n \to \ell$ ne converge pas.

F Soient $f(x) = (\pi/2)\,\cos^2 x$, $I := [0, \pi/2]$, de sorte que $f(I) = I$ et donc $a_n \in I$, $\forall\, n$. f est strictement décroissante sur I.
Le point fixe de f dans I est $\ell = \pi/4$. (On voit que c'est un point fixe, et son unicité suit de la monotonie de f.) Par ailleurs, ce point fixe est répulsif, car $|f'(\ell)| = \pi/2 > 1$. On trouve que a_n converge si et seulement si $a_n = \ell$ pour un n.
Or, la monotonie de f donne $a_n < \ell \implies a_{n+1} > \ell$ et $a_n > \ell \implies a_{n+1} < \ell$, d'où $a_0 \neq \ell \implies a_n \neq \ell,\ \forall\, n \implies a_n \not\to \ell$.

G Tout ce qui suit s'obtient par récurrence.
1. Si $x_0 = \pm 1$, alors $x_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$, et $x_n \to 1$.
2. Si $x_0 > 1$ ou $x_0 < -1$, alors $x_n > 1$ et $x_{n+1} > x_n$, $\forall\, n \geq 1$. On obtient que $x_n \to \ell$, avec $\ell > 1$. Comme l'équation $\ell = (\ell^2 + 1)/2$ n'a que la solution 1, on trouve $x_n \to \infty$.
3. Si $-1 < x_0 < 1$, alors $0 < x_n < 1$ et $x_{n+1} > x_n$, $\forall\, n \geq 1$. On trouve $x_n \to 1$.

Exercice 13. (a) suit de l'encadrement $\dfrac{n}{n^\alpha + n^\alpha} \leq u_n \leq \dfrac{n}{n^\alpha + 1}$.
(b) Le même encadrement donne $1/2 \leq u_n \leq 1$. Par ailleurs,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

La suite est donc convergente.
(c) On a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/(n+k))}_{\ln((2n+1)/(n+1))} \leq u_n \leq \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} \ln(1-1/(n+k))}_{\ln 2},$$

d'où $u_n \to \ln 2$, par encadrement.

Exercice 14. (a) Le plus simple est par étude de fonctions, les différences entre les quantités à étudier étant évidemment monotones.
(b) On a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2\,n^4}\right)}_{(n+1)/(2\,n)-(n+1)\,(2\,n+1)/(6\,n^3)} \leq u_n \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}}_{(n+1)/(2\,n)},$$

et la limite est donc $1/2$.

Exercice 15. (a) On a $v_{n+1} \geq v_n \iff n\,u_{n+1} \geq u_1 + \cdots + u_n$, et la deuxième inégalité suit de la monotonie de (u_n).
(b) Ceci revient à $u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geq n\,u_n$, ce qui est clair.
(c) On a $v_n \leq l$, et donc (v_n) converge vers une limite $L \leq l$. On a aussi $L \geq (l+L)/2$, d'où $L \geq l$, et finalement $L = l$.

Exercice 16. On a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = 1/2$.

La suite (H_n) étant clairement croissante, elle a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. L'inégalité montrée implique $\ell - \ell \geq 1/2$, d'où $\ell = \infty$.

Exercice 17. (a) La monotonie de (a_n) est évidente. On a aussi

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} = -\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+1)!} < 0.$$

Enfin, clairement $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
(b) Le premier fait est « du cours » (position d'une suite monotone par rapport à sa limite).

Puis : on peut clairement écrire $a_q = \dfrac{p_q}{q!}$, et alors $b_q = \dfrac{p_q + 1/q}{q!}$. On obtient $p_q < p < p_q + 1/q$, ce qui est impossible pour des entiers p_q et p.

Exercice 18. Soit ℓ la limite de (u_{2n}). À partir de $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$, on obtient par encadrement que $u_{2n+1} \to \ell$, et finalement $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Exercice 19. (a) On peut réécrire la récurrence comme $u_0 + 1 = 1$ et $u_{n+1} + 1 = 2\,(u_n + 1)$,

d'où $u_n = 2^n - 1$ et $u_n \to \infty$.
(b) Cette fois-ci on écrit $u_0 - 1 = -1$ et $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)/2$, d'où $u_n = 1 - 2^{-n}$ et $u_n \to 1$.

Exercice 20. Traduction. Si $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{1 + y_n}$, $\forall\, n \geq 0$, on doit montrer que les suites (x_n) et $(y_n + 1)$ ont la même limite. En l'occurrence, nous allons montrer que $x_n \to \ell_1$ et $y_n \to \ell_2$, avec $\ell_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \ell_1 - 1$.

Pour étudier (x_n), on procède comme dans l'exercice 12 C (f est contraction), avec $I = [1, 2]$.

Pour étudier (y_n), on procède de même, avec $I = [1/2, 1]$.

Exercice 21. On montre successivement :

1 $u_n \leq v_n$, $\forall\, n \geq 1$ (on se ramène à $(a - b)^2 \geq 0$, ou on utilise l'inégalité des moyennes) ;

2 $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$;

3 $v_n \geq v_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$.

En particulier, (u_n) et (v_n) ont des limites finies ℓ et L. En passant à la limite la récurrence de (v_n), on obtient $\ell = L$.

Exercice 22. (a) S'il y a une infinité de pics, notons-les, dans l'ordre de l'apparition dans la suite, x_{m_1}, x_{m_2},... Alors $(x_{m_k})_{k\geq 1}$ est décroissante.
(b) S'il n'y a qu'un nombre fini (ou nul) de pics, soit n_1 un nombre entier plus grand que tous les rangs de pics. Donc x_n n'est pas un pic, $\forall\, n \geq n_1$. En particulier, x_{n_1} n'est pas un pic, donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Par récurrence en utilisant la définition de n_1, on construit n_k tel que la suite (x_{n_k}) soit strictement croissante.
(c) On obtient un peu mieux que le théorème de Ramsey : toute suite contient soit une suite décroissante, soit une suite strictement croissante (plus énoncé symétrique).

Exercice 23. La méthode 1 donne une sous-suite monotone et bornée, donc convergente.
(a) La méthode 2 consiste à définir $I_0 = [-M, M]$, et à définir par récurrence I_n comme l'une des moitiés (fermées) de I_0 contenant une infinité de termes de la suite (u_n). On pose alors $I_n = [a_n, b_n]$. Le fait que les suites (a_n) et (b_n) soient adjacentes suit de $I_{n+1} \subset I_n$ et de $\ell(I_n) = \ell(I_0)/2^n \to 0$.

Il reste à construire $\varphi(n)$. On choisit $\varphi(0) = 0$. Si $\varphi(n)$ a été choisi, on considère un $m > \varphi(n)$ tel que $u_m \in I_{n+1}$. Ceci est possible car I_{n+1} contient une infinité de termes de la suite (u_k). Le fait que $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ traduit $u_{\varphi(n)} \in I_n$.
(b) Par encadrement et le fait que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Suites compléments

Exercice 24 Étudier la monotonie de $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = -\text{th}\, n$ puis $(V_n)_{n\geq 0}$: $V_n = \dfrac{1}{1-\text{th}\, n}$ puis $(W_n)_{n\geq 0}$: $W_n = n^4 + \dfrac{\ln n}{1-\text{th}\, n}$.

Exercice 25 Étudier la monotonie de $(a_n)_{n\geq 3}$ définie par : $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice 26

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 27

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

Exercice 28

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones.
2. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.