TD n°1 : Exercices de probabilités

L1 - Licences Sciences pour la Santé

Eléments de correction

Exercice 1

On considère un jeu de tir sur une cible comportant 3 zones 1, 2 et 3. On considère P une probabilité sur Ω l'univers associé à cette expérience telle que $P(\{3\}) = p$, $P(\{2\}) = 2p$ et $P(\{1\}) = 3p$.

Pour quelle valeur de p cela est-il possible ?

Correction

$p+2p+3p=6p$ doit être égal à 1 donc $p = 1/6$

Exercice 2

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et deux événements A et B tels que respectivement les probabilités que A et B se réalise soit égale à 0.08, et que la probabilité que l'un ou l'autre se réalise soit égale à 0.52. On suppose que A a deux fois plus de chances de se réaliser que B.

a) Déterminer les probabilités des événements A et B.
b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction

a) On a $P(A \cap B)=0.08$ et $P(A \cup B)=0.52$ et $P(A)=2P(B)$

Or on sait que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Donc

$0.52 = 3*P(B) - 0.08$

$0.60 = 3*P(B)$

D'où $P(B)=0.2$ et $P(A) = 0.4$

b) $P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0.08$ donc A et B sont indépendants

Exercice 3

Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?
Correction

On note M la population malade et T l'ensemble des personnes avec un test positif.

L'énoncé donne P(M) = 0.001, P(T|M)=0.99 et P(T|M^c)=0.002.

Nous cherchons P(M|T).

On applique la formule de Bayes

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$$

Comme M et M^c partitionne la population, Le dénominateur P(T) peut s'écrire à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|M^c)P(M^c)} = \frac{\frac{99}{100} * \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} * \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} * \frac{999}{1000}} \approx 0.33$$

Ainsi, bien que le résultat soit rarement faussement négatif, la rareté plus grande encore de la maladie fait que la plupart (66%) des résultats positifs sont des faux positifs !

Exercice 4

1. Hier, je discutais avec ma nouvelle voisine :
Moi – Combien avez-vous d'enfants ?
Elle – Deux.
Moi – Y a-t-il une fille parmi eux ?
Elle – Oui.
Moi – Et l'autre enfant, est-ce une fille également ?

1.a) Quelle est la probabilité que ma voisine réponde « oui » ?
1.b) Qu'en est-il si à ma deuxième question j'avais demandé si l'aîné(e) était une fille ?

Correction

1.a) Quelle est la probabilité que ma voisine réponde « oui » ?

Il est important de préciser le modèle. On suppose que les sexes des enfants sont indépendants et uniformes : la probabilité d'avoir un garçon vaut 1/2, de même pour une fille.
En particulier, pour deux enfants, il y a quatre possibilités : FF, FG, GF et GG, où chacune a pour probabilité 1/4 (attention, il y a bien FG et GF).

Sachant que l'un des enfants est une fille, on se restreint au sous-ensemble (FF, FG, GF) à trois éléments dont un seul contient deux filles, donc la probabilité que l'autre enfant soit une fille aussi est 1/3 (seul le cas FF est favorable sur les trois cas restants)

Formellement, notons F1 l'événement « le premier enfant est une fille » et F2 « le deuxième enfant est une fille ». On a P(F1)=P(F2)=1/2 et F1 et F2 sont indépendants.

D'après l'énoncé, on a l'information sur F1 ou F2 ($F1 \cup F2$) (en effet, on ne sait pas si c'est l'aîné ou le cadet qui est une fille). La probabilité recherchée est donc

$$P(F1\ et\ F2 \mid F1\ ou\ F2) = \frac{P(F1\ et\ F2)}{P(F1\ ou\ F2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{P(F1) + P(F2) - P(F1\ et\ F2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

1.b) Qu'en est-il si à ma deuxième question j'avais demandé si l'aîné(e) était une fille ?

Sachant que le premier enfant est une fille, on se restreint au sous-ensemble (FF, FG) seulement, donc la probabilité que l'autre enfant soit un garçon est 1/2. On peut aussi dire que, par hypothèse, le sexe du deuxième enfant est indépendant du premier, donc (toujours par hypothèse) le deuxième, quel que soit le premier, est une fille avec probabilité 1/2.

Formellement, ici la probabilité recherchée est

$$P(F2 \mid F1) = \frac{P(F1\ et\ F2)}{P(F1\ )} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

Bonus : Monty Hall

Résolution via les probabilités totales

Soient les événements

- G = gagner la voiture
- B = choisir la bonne porte lors du choix initial

Alors la probabilité de G s'écrit

$$P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|B^C)P(B^C)$$

Stratégie garder la porte initiale :

$$P(G) = 1 * 1/3 + 0 * 2/3 = 1/3$$

Stratégie changer de porte :

$$P(G) = 0 * 1/3 + 1 * 2/3 = 2/3$$