(*585*) SOMMATION DE SÉRIES ALTERNÉES

Résumé : On propose un procédé linéaire universel d'accélération de convergence de séries alternées, simple à mettre en œuvre, qui conduit à une convergence de type géométrique pour une large classe de séries lentement convergentes.

Thème applicatif, mots clefs : séries alternées, resommation, polynômes orthogonaux.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs, décroissant vers 0, et S la somme de la série alternée de terme général $(-1)^n a_n$. On désire évaluer, aussi rapidement que possible, un grand nombre de chiffres significatifs de S. La sommation partielle naïve des N premiers termes fournit un reste en a_N, tout à fait raisonnable si (a_n) décroît rapidement, par exemple géométriquement. En effet, si $\gamma > 1$, un reste en γ^{-N} donne une précision relative de C chiffres décimaux significatifs au prix de la sommation d'environ $C/\log_{10}(\gamma)$ termes. Au contraire, si la décroissance est lente, par exemple pour $a_n = 1/(n+1)$, il faut sommer un très grand nombre de termes ; on rencontre de surcroît des problèmes de stabilité numérique dans la somme partielle (soustraction de termes du même ordre de grandeur). Nous allons étudier un procédé linéaire universel qui, au prix d'hypothèses raisonnables sur la suite (a_n), permet d'obtenir systématiquement une convergence de type géométrique.

2. Hypothèse sur (a_n)

On suppose que les a_n sont les moments d'une mesure positive $d\mu$ sur l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire que

$$a_n = \int_0^1 x^n d\mu, \quad \text{pour tout } n \geq 0 \tag{1}$$

Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ défini par $\Delta((b_n)) := (b_{n+1} - b_n)_{n\geq 0}$, et Δ^k le k-ième itéré de Δ :

$$\Delta^0 := \mathrm{Id}, \quad \Delta^k := \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}.$$

On admet le théorème suivant, dû à Hausdorff (1923) :

Théorème 1. *La condition* (1) *est vérifiée si et seulement si, pour tout* $k \geq 0$, *les termes de la suite* $\Delta^k((a_n))$ *sont de signe constant* $(-1)^k$.

C'est en particulier le cas si $a_n = A(n)$ pour une fonction A de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^+$, dont la k-ième dérivée $A^{(k)}(x)$ est de signe constant $(-1)^k$ pour tout $k \geq 0$. On supposera dans toute la suite que la condition (1) est vérifiée.

3. Description du procédé

Soit $\{P_n(x)\}$ une suite de polynômes de $\mathbf{C}[X]$, tels que P_n soit de degré exactement n et $P_n(-1) \neq 0$. On définit les coefficients $c_{n,k} = c_{n,k}(P_n)$, $0 \leq k < n$, par l'identité

$$\frac{P_n(-1) - P_n(x)}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} x^k$$

ainsi que $d_n = d_n(P_n) := P_n(-1)$.

Théorème 2. *On suppose que les* a_k *sont les moments d'une mesure positive sur* $[0,1]$. *On note*

$$S = \sum_{k\geq 0} (-1)^k a_k, \quad S_n = S_n(P_n) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_{n,k}}{d_n} a_k.$$

Alors

$$|S - S_n| \leq \frac{\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x)|}{|P_n(-1)|} S$$

PREUVE : (Esquisse). C'est une conséquence immédiate des deux égalités

$$S = \int_0^1 \frac{1}{1+x} d\mu, \quad \text{et} \quad S - S_n = \int_0^1 \frac{P_n(x)}{P_n(-1)(1+x)} d\mu \qquad \square$$

Il est remarquable que l'on puisse choisir des (P_n) universels et obtenir une majoration de l'erreur relative ne dépendant que du nombre de termes sommés.

4. Choix de (P_n)

Il s'agit donc maintenant de trouver une suite de polynômes, facilement calculables, qui soient petits sur $[0,1]$, et grands en -1. Des solutions raisonnables sont $P_n(X) = (1-X)^n$, pour lequel on obtient une convergence en $1/2^n$, ou plus généralement $P_n(X) = X^{\alpha_n}(1-X)^{\beta_n}$, avec $\alpha_n + \beta_n = n$, qui fournit une convergence en $1/3^n$ pour un choix optimal de (α_n, β_n).

Nous choisirons pour $P_n(X)$ une variante du polynôme de Chebyshev $T_n(X)$, définie par $P_n(\sin^2 t) = \cos 2nt$, si $t \in \mathbf{R}$. (T_n serait défini par la condition $T_n(\cos t) = \cos nt$; on a donc $P_n(X) = T_n(1-2X)$.) La récurrence

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 1-2X \\ P_{n+2}(X) &= 2(1-2X)P_{n+1}(X) - P_n(X) \quad \text{si } n \geq 0 \end{aligned}$$

implique que $2d_n = (3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n$, ainsi que la formule explicite

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n}{n+k} C_{n+k}^{2k} 2^{2k} X^k. \tag{2}$$

Pour ce choix, la convergence de S_n est en $1/d_n \sim 2(3+\sqrt{8})^{-n}$. Ce choix spécifique de P_n est en vigueur pour toute la suite du texte.

5. Mise en œuvre

Comme la suite (P_n) est indépendante de (a_n), on peut précalculer ses N premiers termes, ce qui se révèle coûteux en mémoire : il y a $O(N^2)$ coefficients à stocker, qui sont eux-mêmes de gros entiers. On peut aussi fixer n en fonction de la précision requise et calculer S_n de la façon suivante :

on note $c_k := c_{n,k}$ et $P_n(X) = \sum p_k X^k$ (c_k et p_k dépendent de n), puis on calcule de proche en proche les coefficients c_k et p_k pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ en utilisant

– la valeur connue de $d_n := ((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n)/2 \in \mathbf{Z}$.

– la récurrence qui résulte de (2) :

$$p_0 = 1, \quad p_{k+1} = p_k \cdot (k+n)(k-n) \,/\, \big((k+\tfrac{1}{2})(k+1)\big) \text{ si } k \geq 1.$$

– la formule

$$d_n - P_n(X) = c_0 + \sum_{k\geq 1} (c_{k-1} + c_k) X^k$$

qui implique

$$c_0 = d_n - p_0, \quad c_k = -p_k - c_{k-1} \text{ si } k \geq 1.$$

Pour une suite (a_k) et une précision fixée, on peut ainsi calculer $\sum_k c_k a_k$ en n'utilisant que trois variables auxiliaires, correspondant respectivement à p_k, c_k, et à la somme partielle. Les p_k sont des entiers naturels, mais il peut être avantageux de les calculer en virgule flottante, à une précision convenable.

6. Applications

6.1. *Quelques constantes*

Voici tout d'abord deux séries lentement convergentes dont on peut néanmoins calculer efficacement la somme :

$$\log 2 = \sum_{n\geq 0} (-1)^n/(n+1), \qquad \pi = 4\mathrm{Arctan}(1) = 4\sum_{n\geq 0} (-1)^n/(2n+1)$$

Soit maintenant la constante γ d'Euler

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(-\log(n) + \sum_{i\leq n} 1/i \right),$$

qui vérifie

$$\sum_{n>0} (-1)^n \frac{\log n}{n} = \log 2 \left(\gamma - \frac{\log 2}{2} \right).$$

On pourrait donc utiliser cette série alternée pour calculer γ, à condition que le critère de Hausdorff s'applique. Il ne semble pas que ce soit le cas ; en tout état de cause, le critère simple sur les dérivées k-ièmes ne s'applique pas. En pratique, la convergence est du type espéré.

6.2. *La fonction zêta*

Soit la fonction zêta de Riemann :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &:= \sum_{n\geq 0} (n+1)^{-s}, \quad (s \in \mathbf{R}, s > 1) \\ &= (1-2^{1-s})^{-1} \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)^{-s}. \end{aligned}$$

Notons que le membre de droite de la deuxième ligne est en fait analytique sur le demi-plan $\Re(s) > 0$, et définit un prolongement analytique de ζ sur cette zone privée de $s = 1$. Pour $s \in \mathbf{R}^{+*}$, notre procédé de resommation est justifié ; mais pour $s = 0$ ou s complexe, il ne l'est pas du tout. Pourtant, on constate que la série resommée converge expérimentalement quand la partie imaginaire de s est petite ou que la précision est grande, et qu'elle semble converger vers la valeur correcte. Pour $s = 0$, il est facile de démontrer que notre algorithme de sommation appliqué à $\sum(-1)^n$ converge vers $1/2$, ce qui conduirait à poser "$\zeta(0) = -1/2$". On démontre en fait que la fonction zêta admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$, et que ce prolongement prend bien la valeur $-1/2$ en $s = 0$!

Cette robustesse suggère une autre utilisation de notre algorithme : même si son emploi n'est a priori pas justifié par le Théorème 1, il permet de calculer rapidement de nombreux chiffres significatifs d'une certaine constante, ne correspondant pas nécessairement à la somme de la série. Ces décimales peuvent alors permettre de reconnaître la somme comme formule close, et de conjecturer une identité ... qu'il ne reste plus qu'à démontrer.

6.3. *Séries à termes positifs*

Enfin, ce procédé permet aussi de sommer des séries dont le terme général est maintenant de signe constant, grâce à l'identité formelle

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{m\geq 1} (-1)^{m-1} b_m, \quad \text{où} \quad b_m := \sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k m}, \tag{3}$$

qui se démontre en regroupant pour *i impair* fixé tous les indices de la forme $m = 2^j i$, $j \in \mathbf{N}$, dans $\sum(-1)^{m-1} b_m$. Cette formule est rigoureusement justifiée dans $\mathbf{R}$ lorsque $\sum_m b_m$ converge. (On suppose toujours que $a_n \geq 0$. Aucune hypothèse de décroissance n'est requise.)

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Compléter la démonstration du Théorème 2, et démontrer les assertions du §4 (éviter la démonstration par récurrence de la formule 2 qui n'est pas très intéressante).
- Calculer les polynômes P_n pour $n = 2, \ldots, N$, à partir de la méthode proposée au §5 ; comparer avec la formule exacte (2) et la relation de récurrence linéaire du §4.
- Étudier les différents exemples proposés au §6 (vous pouvez démontrer une des formules exactes), ou d'autres de votre crû. Comparer la vitesse de convergence expérimentale avec la borne du Théorème 2. Comparer avec la sommation naïve. Tester des séries présentant déjà une convergence géométrique, comme $\sum(-1)^n x^n$, $x < 1$.
- Expérimenter avec des séries à termes positifs comme suggéré au §6.3. Par exemple, qu'obtient-on en appliquant l'identité (3) à $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s}$?
- Étudier la complexité de l'algorithme du §5 (nombre d'évaluations de a_n et d'opérations arithmétiques en fonction de la précision relative demandée).