INTRODUCTION AU TRANSPORT OPTIMAL - I

THÉORIE DE MONGE-KANTOROVICH

$\mu \in \mathcal{P}(X) \quad \nu \in \mathcal{P}(Y)$ $\qquad$ X, Y ESP. MÉTRIQUES

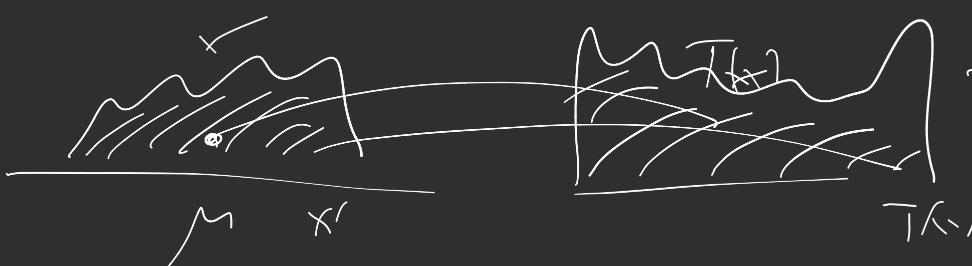
$(X, Y \subset \mathbb{R}^n)$

$c : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ COÛT DE DÉPLACEMENT PAR UNITÉ DE MASSE

ON CHERCHE $T : X \to Y$ T.Q. $\underline{T_{\#}\mu = \nu}$

QUI MINIMISE

$$\int_X c(x, T(x))\, d\mu(x)$$



$T_{\#}\mu \in \mathcal{P}(Y)$ DÉFINIE PAR

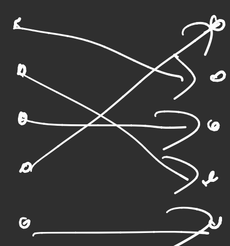
$(T_{\#}\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A))$

$$\min \left\{ \int c(x,T)\,d\mu \ : \ T : X \to Y \quad T_\#\mu = \nu \right\}$$

ex, $\quad c(x,y) = \|x-y\|^p$

EXEMPLE DISCRET $\qquad X = Y = \{1, \dots, n\}$ $\qquad \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i$

$c(i,j)$ Donné $\qquad \nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_j$



LE PB DE TRANSPORT DEVIENT

$$\min_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n} \sum_i c(i, \sigma_i)$$

Existence d'un T optimal : cas facile

$\boxed{\text{Problème de Monge : } T}$

Ex : $c(x,y) = \|x-y\|^2$

T_n suite min $\quad \int \|x - T_n(x)\|^2 d\mu \longrightarrow M$

$\geq C$

$\Rightarrow T_n$ borné dans L^2

$\Rightarrow T_{n_k} \xrightarrow{L^2} T$

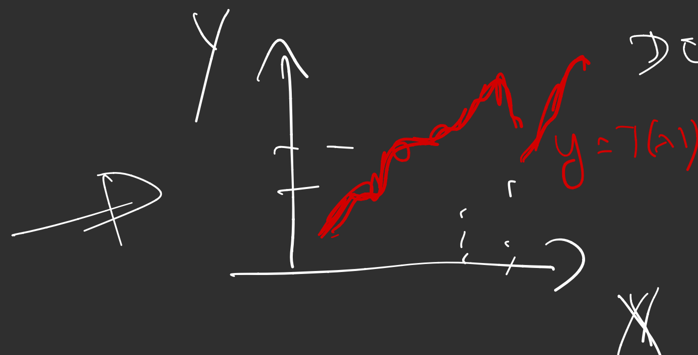
Difficulté : $T_n \# \mu = \nu \not\Rightarrow T \# \mu = \nu$

$T_n \# \mathcal{L}_{[0,1]} = \mathcal{L}_{[0,1]}$

$T \# \mathcal{L}_{[0,1]} = \delta_{1/2}$

THÉORIE DE KANTOROVITCH

INGRÉDIENTS : $\underline{\mu \in \mathcal{P}(X)}$ $\quad \underline{\nu \in \mathcal{P}(Y)}$ $\quad c : X \times Y \to \mathbb{R}$



DESCRIPTION DU TRANSPORT :

$$\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$$

$\gamma(A \times B) =$ COMBIEN DE MASSE VA DE A À B

$$\Pi(\mu,\nu) = \{ \gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi_X \underline{\# \gamma} = \mu \quad \pi_Y \underline{\#} \gamma = \nu \}$$

$$\min \left\{ \int_{X \times Y} c \, d\gamma : \gamma \in \Pi(\mu,\nu) \right\}$$

LE PB DE KANT. EST UNE EXTENSION DU PB DE MONGE

SI VOUS AVEZ $T : X \to Y$ $\quad T_\# \mu = \nu$

ON PREND $\gamma_T := (id, T)_\# \mu \in \mathcal{P}(X \times Y)$

γ conc. sur un graphe

$(id, T) : X \longrightarrow X \times Y$

$$\int c \, d\gamma_T = \int c(x, T(x)) \, d\mu$$

[RMQ : $T_\# \mu = \nu \iff \forall A \quad \mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$

$\iff \forall \varphi \quad \int \varphi \circ T \, d\mu = \int \varphi \, d\nu$]

QUESTION : SI ON VEUT ÉTUDIER MONGE, EST-CE QUE LES γ OPTIMUM DANS KANT. EST CONCENTRÉ SUR LE GRAPHE D'UN T

LE PB DE KANT EST PLUS SIMPLE

1) EXISTENCE

X, Y COMPACT $\qquad c : X \times Y \to \mathbb{R}$ CONTINUE

γ_n MINIMISANT $\qquad \gamma_n \in P(X \times Y)$ $\qquad \boxed{Z = X \times Y}$

$\gamma_{n_k} \xrightarrow{*} \gamma$

$\int \varphi(x) d\gamma_n = \int \varphi d\mu \qquad \varphi \in C(X)$

$\downarrow$

$\int \varphi(x) d\gamma \Rightarrow$

$\int \psi(y) d\gamma_n = \int \psi d\nu \qquad \psi \in C(Y)$

$\Downarrow$

$\int \psi d\gamma$

RAPPEL : SI Z EST UN ESP. COMPACT

$(C(Z), \| \|_\infty)$ EST UN BANACH SEPARABLE

$C(Z)^* = \mathcal{M}(Z)$ (RIESZ)

$P(Z) \subset$ BOULE UNITÉ DE $\mathcal{M}(Z)$

$\Rightarrow$ COMPACT $\xrightarrow{*}$

$\Pi(\mu,\nu)$ est compact pour $\xrightarrow{*}$

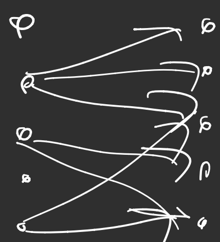
$$\gamma \longmapsto \int c \, d\gamma \quad \text{si } c \in C(X \times Y)$$

est continu pour $\xrightarrow{*}$

$\Longrightarrow$ par Weierstrass $\exists$ min

2) Kant est un pb de prog. linéaire

exemple discret $\quad \mu = \frac{1}{n} \sum \delta_i \qquad \nu = \frac{1}{n} \sum \delta_j$

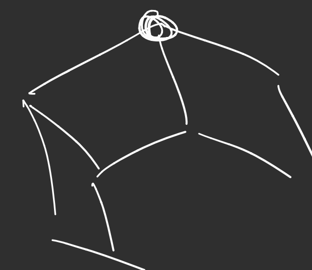


Inconnu : $(\gamma_{ij})_{i,j = 1 \dots n}$

$$\min \underline{\sum c_{ij} \gamma_{ij}} \quad : \quad \underline{\gamma_{ij} \geq 0} \qquad \underline{\sum_j \gamma_{ij} = \frac{1}{n}} \quad \underline{\sum_i \gamma_{ij} = \frac{1}{n}}$$

OBS : Les matrices bistochastiques sont l'enveloppe convexe des matrices de permutation

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On va exploiter une propriété de la prog. linéaire $\Longrightarrow$ convexité

$$\boxed{\text{DUALITÉ CONVEXE}}$$

$$\min \left\{ \int c \, d\gamma : \quad \gamma \geq 0, \; \begin{array}{l} \forall \varphi \; \int \varphi(x) \, d\gamma = \int \varphi \, d\mu \\ \forall \psi \; \int \psi(y) \, d\gamma = \int \psi \, d\nu \end{array} \right\}$$

$$= \min_{\gamma \geq 0} \int c \, d\gamma + \underbrace{\sup_{\varphi, \psi} \int \varphi \, d\mu - \int \varphi(x) \, d\gamma + \int \psi \, d\nu - \int \psi(y) \, d\gamma}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \pi_{x\#}\gamma = \mu, \; \pi_{y\#}\gamma = \nu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sup_{\varphi, \psi} \inf_{\gamma \geq 0} \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\nu + \int \left[c(x,y) - \varphi(x) - \psi(y) \right] d\gamma$$

PROB DUAL

$(P) = \min \{ \int c\, d\gamma : \gamma \in \Pi(\mu,\nu) \}$

$\psi \in C(Y)$, $\varphi \in C(X)$

$(D) = \max \{ \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\nu : \varphi \oplus \psi \le c \}$

$\sup_{\varphi,\psi}$ $\underbrace{\int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\nu}$ $\inf_{\gamma \ge 0}$ $\int \underbrace{[c(x,y) - \varphi(x) - \psi(y)]}\, d\gamma$

PROB DUAL

$= \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi(x)+\psi(y) \le c(x,y) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

LA DUALITÉ CONVEXE

$\min (P) = \max (D)$

ÉTUDE DU PB DUAL : D'OÙ LA COMPACITÉ ?

SI J'AI (φ, ψ) T.Q. $\boxed{\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)}$

QUI EST LE PLUS GRAND ψ COMPATIBLE AVEC MON φ ?

$$\psi(y) \leq \boxed{\inf_x c(x,y) - \varphi(x)} := \varphi^c(y)$$

IL VAUT MIEUX REMPLACER (φ, ψ) PAR (φ, φ^c)

ET PUIS PAR $(\varphi^{cc}, \varphi^c)$

AVANTAGE : SI c EST UNIF. CONT. $\Rightarrow \varphi^c$ L'EST AUSSI

φ^c A LE MÊME MOD. DE CONT. DE c

$$\max \left\{ \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\nu \ : \ \underline{\varphi \oplus \psi \leq c} \right\} \quad \text{ADMET}$$

UNE SOLUTION DANS LA CLASSE
DES COUPLES $(\varphi^{c}, \varphi^{c})$
(QUI ONT LE MÊME MOD. DE CONT. DE c)

PRENONS (γ, φ, ψ) OPTIMAUX

$$\min(P) = \int c \, d\gamma \geq \int [\varphi(x) + \psi(y)] \, d\gamma = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\nu = \max(D)$$

$= \quad \Rightarrow \qquad c \geq \varphi \oplus \psi$ PARTOUT

$c = \varphi \oplus \psi$ SUR $\operatorname{spt} \gamma$

Cas particulier : $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compacts $c \in C^1$

$(x_0, y_0) \in \operatorname{spt} \gamma$

$$\varphi(x) + \psi(y_0) \leq c(x, y_0) \quad \forall x$$

$$\varphi(x_0) + \psi(y_0) = c(x_0, y_0)$$

$\Longrightarrow \quad x \longmapsto c(x, y_0) - \varphi(x)$ min en $x = x_0$

$\boxed{\text{si } \exists \nabla \varphi(x_0)}$ $\quad \nabla_x c(x_0, y_0) = \nabla \varphi(x_0)$

<u>HYP</u> : $c(x,y) = h(x-y)$ $\quad h \in C^1$ str. conv.

$$\nabla h(x_0 - y_0) = \nabla \varphi(x_0) \Rightarrow y_0 = x_0 - (\nabla h)^{-1}(\nabla \varphi(x_0))$$

$T = \mathrm{id} - (\nabla h)^{-1} \circ (\nabla \varphi)$ $\quad \Longrightarrow$ $\boxed{\gamma \text{ est conc. sur graphe de } T}$

Thm Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont à supp. compact

$c(x,y) = h(x-y)$ $\quad h \in C^1$ + str. conv.

si $\mu \ll \mathcal{L}^n \implies \exists!\ \gamma$ sol du pb de Kant

et $\gamma = \gamma_T$ où $T = id - (\nabla h)^{-1} \circ \nabla \varphi$ où φ, Lipschitz,

est une solution du dual

Preuve $\exists\, \gamma$ ok $\qquad \varphi$ on peut les prendre avec

la même mod de cont de c

$\implies \varphi$ est Lip $\implies \exists\, \nabla\varphi$ p.p.

(Rademacher)

$\mu \ll \mathcal{L}^n \implies \exists\, \nabla \varphi$ μ-p.p.

$\Rightarrow$ γ concentré sur les points $(x_0, y_0 = x_0 - \nabla h^{-1}(\nabla\varphi(x)))$

donc sur le graphe de T.

(unicité de γ ! parce que si j'en ai deux ils sont sur le même graphe)

Cas particulier : $h(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2$ $\quad \nabla h(z) = z$

$$T(x) = x - \nabla\varphi(x) = \nabla u(x) \quad \text{où } u(x) = \frac{\|x\|^2}{2} - \varphi(x)$$

On avait dit φ était de la forme $\varphi = \psi^c$

$$\varphi(x) = \inf_y \frac{1}{2}|x-y|^2 - \psi(y)$$

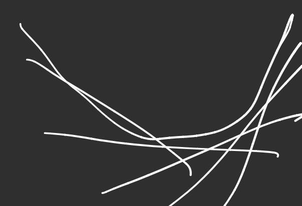
$$\varphi(x) = \inf_y \left(\frac{1}{2}|x-y|^2 - \psi(y) \right)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x) = \frac{|x|^2}{2} - \inf_y \left(\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - x\cdot y - \psi(y) \right)$$

$$= \cancel{\frac{|x|^2}{2}} + \sup_y \left(\cancel{-\frac{1}{2}|x|^2} - \frac{1}{2}|y|^2 + x\cdot y + \psi(y) \right)$$

$$= \sup_y \; \underline{x\cdot y} - \underline{\left(\frac{1}{2}|y|^2 - \psi(y) \right)} \Rightarrow \underline{\text{convexe}}$$

$u = v^*$ où $v(y) = \frac{1}{2}|y|^2 - \psi(y)$



Théorème de Brenier

$$\boxed{\mu(A)=0 \ \forall A : \mathcal{H}^{n-1}(A)<\infty} \quad \int |x|^2 d\mu \quad \int |y|^2 d\nu < +\infty$$

Si $c(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2$, $\mu \ll \mathcal{L}^n$, μ, ν spt compact

$\Rightarrow \exists !\ T$ sol de Monge $\quad T = \nabla u \quad u$ convexe