Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Statistique, Modélisation et Science des données
8 décembre 2025

Optimisation Convexe : Algorithmes et Applications en Apprentissage

Contrôle terminal. Durée : 2h. Tous les documents sont autorisés, mais pas les objets connectés et les moyens de communication. Le barème dépasse largement 20, il est conseillé de ne pas traiter tous les exercices.
Dans tout le sujet ci-dessous, $||x||$ désigne la norme euclidienne : $||x|| := (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$.

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2)^2$$

Calculer f^*. Est-ce que f et/ou f^* sont elliptiques ?

Exercice 2 (6 points)**.** Étant donné une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ définie positive, un point “cible” $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ et un point “départ” $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ainsi qu'un nombre $\tau > 0$, considérer la suite (x_k, y_k) définie par recurrence comme suit

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \min\{1, \max\{-1, x_k - \tau(a(x_k - \bar{x}) + b(y_k - \bar{y}))\}\}, & (1)\\ y_{k+1} &= (|y_k - \tau(b(x_k - \bar{x}) + c(y_k - \bar{y}))| - \tau)_+ \mathrm{signe}(y_k - \tau(b(x_k - \bar{x}) + c(y_k - \bar{y})). & (2) \end{aligned}$$

1. S'agit-il de la suite obtenue en appliquant un algorithme connu pour résoudre un problème d'optimisation ? lequel ?
2. Prouver que si τ est suffisamment petit alors la suite $(x_k, y_k)_k$ converge vers un point (x_∞, y_∞) et le caractériser comme solution d'un problème d'optimisation.
3. Donner une estimation précise de la vitesse de convergence de la suite $(x_k, y_k)_k$.

Exercice 3 (6 points)**.** Étant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ on considère l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}$, où l'inégalité $x \geq 0$ est à prendre composant par composante. On suppose par la suite que K est non-vide. Étant donnéun point $y \in \mathbb{R}^n$ on considère

$$\min\{||x - y|| : x \in K\}.$$

1. Prouver que ce problème admet une unique solution.
2. Décrire comment approcher la solution du problème par l'algorihme d'Uzawa en donnant les étapes de manière explicite.

Exercice 4 (9 points)**.**
1. Prouver que pour tout $p > 1$ la fonction $h_p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $h_p(s) = (1 + s^p)^{1/p}$ est convexe et Lipschitzienne de constante 1.
2. On définit ensuite la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_{p_i}\left(\sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2}\right),$$
où on pose $x_{n+1} = x_1$ et les exposants p_i sont des exposants strictement plus grands que 1 et fixés. Prouver que l'on a $f(x) \geq \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3. Étant donné un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ avec des composantes $(v_i)_i$ telles que $|v_i| \leq 1$ pour tout i, on considère le problème
$$(P) \qquad \min\{f(x) + v \cdot x : x \in \mathbb{R}^n\}.$$
Prouver que ce problème admet une unique solution.
4. Décrire comment approcher la solution du problème par l'algorithme de gradient stochastique et quel type de convergence on obtient.
5. Peut-on améliorer la condition $f(x) \geq \sum_{i=1}^n |x_i|$ en obtenant en fait $f(x) \geq \sqrt{2}\sum_{i=1}^n |x_i|$? Que se passe -t-il dans le problème (P) si les composantes v_i de v satisfont $|v_i| \leq \sqrt{2}$?