
Partiel – 2h – 6 Mars 2026
Documents, téléphones portables, calculatrices interdits

On rappelle la notation $a \wedge b = \min(a, b)$, pour tous réels a, b .

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x, y) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $f_{X|Y=y}(x)$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X | Y]$.

Exercice 2. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $(1, 0, -1)$ et de matrice de covariance

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_3]$ et $\mathbb{E}[X_2 | X_3]$.
2. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que $X_1 - \alpha X_2 - \beta X_3$ soit indépendant de X_2 et X_3 , et en déduire $\mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2 | X_3]$.

Exercice 3. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, de carré intégrable, i.e. telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On pose $A_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k].$$

On note également $A_\infty = \lim_{n \uparrow \infty} A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k]$.

1. On souhaite montrer que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.
 - (a) Montrer que le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ défini par $X_n = M_n^2 - A_n$, est une martingale.
 - (b) Montrer que si $(B_n)_{n \geq 0}$ est un processus prévisible (c'est-à-dire tel que B_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout $n \geq 1$), avec $B_0 = 0$, et tel que $(M_n^2 - B_n)_{n \geq 0}$ soit une martingale, alors $A_n = B_n$ presque sûrement, pour tout $n \geq 0$.
 - (c) Pour $a \geq 0$, on note $\tau_a = \inf\{n \geq 0 : A_{n+1} \geq a\}$. Montrer que τ_a est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
 - (d) Montrer que pour tout $a \geq 0$, le processus $(X_{n \wedge \tau_a})_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, et en déduire que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, $(|M_n|)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.

(e) Montrer que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, presque sûrement pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n) < \infty.$$

(f) Conclure.

2. On cherche maintenant à préciser ce qui se passe sur l'évènement $\{A_\infty = \infty\}$. On considère le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$, défini par $Z_0 = 0$, et

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + A_k}, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

(a) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[(Z_n - Z_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}.$$

(c) Dédurre des questions précédentes que $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.

(d) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, et soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels convergeant vers u . Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u.$$

(e) Montrer que sur l'évènement $\{A_\infty = \infty\}$, le processus $(\frac{M_n}{A_n})_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers 0.