
Partiel corrigé – 2h – 6 Mars 2026
Documents, téléphones portables, calculatrices interdits

On rappelle la notation $a \wedge b = \min(a, b)$, pour tous réels a, b .

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x, y) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

La fonction f est bien positive et continue par morceaux, donc mesurable. Ensuite en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (la fonction f est positive), puis une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2/2} \int_x^\infty 2x dx dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2/2} dy = 1, \end{aligned}$$

en reconnaissant la formule de Gauss pour la dernière égalité.

2. Calculer $f_{X|Y=y}(x)$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

On commence par calculer la densité de Y :

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^2 e^{-y^2/2}.$$

On en déduit que

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{y^2} \cdot \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}}.$$

3. En déduire $\mathbb{E}[X | Y]$.

On a (presque sûrement)

$$\mathbb{E}[X | Y] = \int_0^\infty x f_{X|Y}(x) dx = \frac{2}{Y^2} \int_0^Y x^2 dx = \frac{2}{3} Y.$$

Exercice 2. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $(1, 0, -1)$ et de matrice de covariance

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_3]$ et $\mathbb{E}[X_2 | X_3]$.

On utilise la formule du cours (qu'on peut retrouver en cherchant α tel que $X_1 - \alpha X_3$ soit indépendant de X_3) :

$$\mathbb{E}[X_1 | X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\text{Cov}(X_1, X_3)}{\text{Var}(X_3)}(X_3 - \mathbb{E}[X_3]) = 1 + \frac{2}{4}(X_3 + 1) = \frac{X_3 + 3}{2}.$$

De même :

$$\mathbb{E}[X_2 | X_3] = \mathbb{E}[X_2] + \frac{\text{Cov}(X_2, X_3)}{\text{Var}(X_3)}(X_3 - \mathbb{E}[X_3]) = -\frac{X_3 + 1}{2}.$$

2. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que $X_1 - \alpha X_2 - \beta X_3$ soit indépendant de X_2 et X_3 , et en déduire $\mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3]$.

On pourrait utiliser directement la formule du cours mais cela nécessiterait d'inverser une matrice, donc nous allons plutôt retrouver le résultat à la main, en suivant l'indication. Comme pour tout α, β , le vecteur $(X_1 - \alpha X_2 - \beta X_3, X_2, X_3)$ est encore un vecteur gaussien, l'indépendance de la première coordonnée avec les deux suivantes équivaut au fait que leurs covariances sont nulles, donc au système d'équations :

$$\begin{cases} \text{Cov}(X_1, X_2) - \alpha \text{Var}(X_2) - \beta \text{Cov}(X_2, X_3) = 0 \\ \text{Cov}(X_1, X_3) - \alpha \text{Cov}(X_2, X_3) - \beta \text{Var}(X_3) = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1 - 9\alpha + 2\beta = 0 \\ 2 + 2\alpha - 4\beta = 0, \end{cases}$$

soit $\alpha = 1/4$ et $\beta = 5/8$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3] &= \mathbb{E}[X_1] + \alpha(X_2 - \mathbb{E}[X_2]) + \beta(X_3 - \mathbb{E}[X_3]) = 1 + \frac{X_2}{4} + \frac{5}{8}(X_3 + 1) \\ &= \frac{2X_2 + 5X_3 + 13}{8}. \end{aligned}$$

3. Calculer $\mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2 | X_3]$.

On utilise que d'après le cours, conditionnellement à X_3 , la variable $X_1 - X_2$ est une variable gaussienne de moyenne $\mathbb{E}[X_1 - X_2 | X_3]$ et de variance (déterministe) :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1 - X_2 - \mathbb{E}[X_1 - X_2 | X_3])^2].$$

On a déjà vu que $\mathbb{E}[X_1 - X_2 | X_3] = X_3 + 2$. Donc en notant $u = (1, -1, -1)$,

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1 - X_2 - X_3)^2] - 4\mathbb{E}[X_1 - X_2 - X_3] + 4 = uCu^t - 4 = 3.$$

D'où

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2 | X_3] = \sigma^2 + \mathbb{E}[X_1 - X_2 | X_3]^2 = 3 + (X_3 + 2)^2 = X_3^2 + 4X_3 + 7.$$

Exercice 3. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, de carré intégrable, i.e. telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On pose $A_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k].$$

On note également $A_\infty = \lim_{n \uparrow \infty} A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k]$.

1. On souhaite montrer que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.

(a) Montrer que le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ défini par $X_n = M_n^2 - A_n$, est une martingale.

La mesurabilité ne pose pas de problème, et l'intégrabilité découle de l'hypothèse. On note que A_{n+1} et A_n sont $\mathcal{F}_n$ -mesurables, et en utilisant que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale on trouve

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] = A_{n+1} - A_n,$$

d'où il découle que $(X_n)_{n \geq 0}$ est bien une martingale.

(b) Montrer que si $(B_n)_{n \geq 0}$ est un processus prévisible (c'est-à-dire tel que B_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout $n \geq 1$), avec $B_0 = 0$, et tel que $(M_n^2 - B_n)_{n \geq 0}$ soit une martingale, alors $A_n = B_n$ presque sûrement, pour tout $n \geq 0$.

Par différence, on trouve que $(A_n - B_n)_{n \geq 0}$ est une martingale prévisible. Cela entraîne que ce processus est nul presque sûrement. En effet, on peut écrire pour tout $n \geq 0$, presque sûrement,

$$A_{n+1} - B_{n+1} = \mathbb{E}[A_{n+1} - B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = A_n - B_n,$$

et donc $A_n = B_n$ presque sûrement pour tout $n \geq 0$, puisque $A_0 = B_0 = 0$.

(c) Pour $a \geq 0$, on note $\tau_a = \inf\{n \geq 0 : A_{n+1} \geq a\}$. Montrer que τ_a est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

Cela vient du caractère prévisible de $(A_n)_{n \geq 0}$. En effet pour tout n ,

$$\{\tau_a = n\} = \{A_{n+1} \geq a\} \cap \{A_n < a\} \cap \cdots \cap \{A_0 < a\} \in \mathcal{F}_n,$$

car tous les ensembles à droite sont dans $\mathcal{F}_n$.

(d) Montrer que pour tout $a \geq 0$, le processus $(X_{n \wedge \tau_a})_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, et en déduire que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, $(|M_n|)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.

Par le théorème d'arrêt, le processus $(X_{n \wedge \tau_a})_{n \geq 0}$ est une martingale, et par définition de τ_a , elle est minorée par $-a$ (car y compris à l'instant τ_a , on a $A_{\tau_a} < a$). Donc d'après le théorème de convergence p.s. des martingales elle converge presque sûrement. Maintenant sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, il existe a tel que $\tau_a = \infty$ (en fait pour tout $a > A_\infty$). Donc sur cet évènement le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, et $(M_n^2)_{n \geq 0}$ aussi puisque $(A_n)_{n \geq 0}$ converge. On en déduit que $(|M_n|)_{n \geq 0}$ converge, par continuité de la fonction racine carrée.

(e) Montrer que sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, presque sûrement pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n) < \infty.$$

Notons qu'il suffit de le faire pour tout ε de la forme $\varepsilon = 1/k$ avec $k \geq 1$ entier, et puisque l'ensemble des entiers est dénombrable, il suffit de le faire pour un entier k fixé. Or d'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, sur $\{A_\infty < \infty\}$,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] = \frac{A_\infty}{\varepsilon^2} < \infty.$$

(f) Conclure.

On déduit du lemme de Borel-Cantelli conditionnel que p.s. sur l'évènement $\{A_\infty < \infty\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour tout n assez grand $|M_{n+1} - M_n| \leq \varepsilon$, ce qui revient à dire que sur cet évènement, p.s. $(M_{n+1} - M_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0. Combiné au fait que $(|M_n|)_{n \geq 0}$ converge, cela entraîne bien la convergence de $(M_n)_{n \geq 0}$.

2. On cherche maintenant à préciser ce qui se passe sur l'évènement $\{A_\infty = \infty\}$. On considère le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$, défini par $Z_0 = 0$, et

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + A_k}, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- (a) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

La mesurabilité et l'intégrabilité de Z_n ne posent pas de problème. Par ailleurs pour tout $n \geq 0$, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que M_n est de carré intégrable, on trouve

$$\mathbb{E}[(Z_{n+1} - Z_n)^2] \leq \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] < \infty,$$

et donc encore par inégalité triangulaire et par récurrence on en déduit que Z_n est aussi de carré intégrable. Par ailleurs, puisque A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, il vient

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} - Z_n \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{1 + A_{n+1}} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] = 0,$$

en utilisant que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour la dernière égalité.

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[(Z_n - Z_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_n - Z_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{1}{(1 + A_n)^2} \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \frac{A_n - A_{n-1}}{(1 + A_n)^2} \\ &\leq \frac{A_n - A_{n-1}}{(1 + A_n)(1 + A_{n-1})} = \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}, \end{aligned}$$

en utilisant que le processus $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissant pour l'inégalité.

- (c) Dédire des questions précédentes que $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement.

En notant $B_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(Z_k - Z_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]$, on voit que $B_\infty = \lim_{n \uparrow \infty} B_n$ est fini p.s. Or d'après la question 1. cela entraîne que $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.

- (d) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, et soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels convergeant vers u . Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u.$$

En écrivant $u_k = u + \varepsilon_k$ on se ramène aisément au cas où $u = 0$. Supposons donc que $u_k \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $K \geq 1$, tel que pour tout $k \geq K$, on a $|u_k| \leq \varepsilon/2$. Alors, puisque (a_n) est croissante, par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq K$,

$$\left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) u_k \right| \leq \frac{C}{a_n} + \frac{\varepsilon}{2a_n} \sum_{k=K+1}^n (a_k - a_{k-1}) = \frac{C}{a_n} + \frac{\varepsilon(a_n - a_K)}{2a_n} \leq \frac{C}{a_n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

où $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a_{k-1}) |u_k|$. Comme (a_n) diverge, pour n assez grand on a $C/a_n \leq \varepsilon/2$, et donc pour tout n assez grand,

$$\left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) u_k \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre le résultat voulu.

- (e) Montrer que sur l'évènement $\{A_\infty = \infty\}$, le processus $(\frac{M_n}{A_n})_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers 0.

On a

$$\begin{aligned} M_n - M_0 &= \sum_{k=1}^n (Z_k - Z_{k-1})(1 + A_k) = \sum_{k=1}^n Z_k(1 + A_k) - \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(1 + A_{k+1}) \\ &= Z_n(1 + A_n) - Z_0(1 + A_1) - \sum_{k=1}^{n-1} Z_k(A_{k+1} - A_k). \end{aligned}$$

Donc d'après la question précédente, plus le fait que (Z_n) converge vers une v.a. Z_∞ , d'après la question (c), on a p.s. $\frac{M_n}{A_n} \rightarrow Z_\infty - Z_\infty = 0$.