

---

**Fiche 2**  
FILTRATIONS, TEMPS D'ARRÊT, MARTINGALES

---

**Exercice 1.** (a) Soit  $(X_n)$  une surmartingale, telle que  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$  pour tout  $n \geq 1$ . Montrer que  $(X_n)$  est une martingale.

(b) Soient  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  deux sous-martingales par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Montrer que  $(\max(X_n, Y_n))_{n \geq 0}$  est encore une sous-martingale pour la même filtration.

**Exercice 2.** Soient  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  deux martingales par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Soit  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $X_\tau = Y_\tau$  sur l'évènement  $\{\tau < \infty\}$ . On pose  $Z_n = Y_n \mathbf{1}_{\{n < \tau\}} + X_n \mathbf{1}_{\{n \geq \tau\}}$ , pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 3.** Soit  $T$  un temps d'arrêt pour une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

1. On suppose qu'il existe  $n_0 \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ , tels que pour tout  $n \geq 0$ , presque sûrement,

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 \mid \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon.$$

Montrer que  $T$  est fini presque sûrement et que  $\mathbb{E}[T] < \infty$ .

2. On suppose qu'il existe  $n_0 \geq 1$ , et  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout  $n \geq n_0$ , presque sûrement,

$$\mathbb{P}(T \leq 2n \mid \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon.$$

Montrer que  $T$  est fini presque sûrement, mais que l'on peut avoir  $\mathbb{E}[T] = \infty$ .

3. Qu'en est-il si l'on suppose seulement que pour tout  $n \geq n_0$ , presque sûrement,

$$\mathbb{P}(T \leq 2n \mid \mathcal{F}_n) \geq \frac{1}{n}.$$

**Exercice 4.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  un processus adapté à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  tel que  $X_n$  est intégrable pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné  $\tau$  pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , on a  $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ .

(Indication : pour la réciproque, on pourra montrer à l'aide de temps d'arrêt bien choisis que pour tout  $n \geq 1$ , et tout ensemble  $A \in \mathcal{F}_n$ , on a  $\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mathbf{1}_A]$ .)

**Exercice 5.** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = 1/2$ , et  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , avec  $S_0 = 0$ . On note  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ , et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

1. Montrer que  $(S_n)_{n \geq 0}$ ,  $(S_n^2 - n)_{n \geq 0}$ ,  $(S_n^3 - 3nS_n)_{n \geq 0}$ , sont des martingales par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

2. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il existe  $\beta$  tel que  $\exp(\alpha S_n - \beta n)$  est une martingale.

3. Pour  $a, b \geq 0$ , on note  $T_{a,b} = \inf\{n \geq 0 : S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$ . On rappelle que  $T_{a,b}$  est fini presque sûrement. En utilisant les martingales de la question 1, montrer que

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[T] = ab, \quad \mathbb{E}[T \mid S_T = b] = \frac{1}{3}(2ab + b^2).$$

**Exercice 6.** (Un jeu de carte à un seul joueur). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "*rouge la prochaine !*", il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit  $R_n$ ,  $n = 0, \dots, 51$ , le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné  $n$  cartes. Soit  $A_n$  l'évènement {la  $n$ -ième carte retournée est rouge}. Calculer  $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid R_n = j)$ , pour  $j \in \{0, \dots, 26\}$ ,  $n \in \{0, \dots, 50\}$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \mid R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n)$ , où  $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, \dots, R_n)$ ,  $n \in \{0, \dots, 50\}$ ,  $j \in \{0, \dots, 26\}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \quad n = 0, \dots, 50.$$

Montrer que  $X_n = R_n/(52 - n)$ ,  $n = 0, \dots, 50$ , est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  et que  $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ .

3. On définit  $\tau = n \in \{0, \dots, 51\}$ , si le joueur dit "*rouge la prochaine !*", avant de retourner la  $(n+1)$ -ième carte. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est  $\mathbb{E}[X_\tau]$ . Montrer que pour toute stratégie, la probabilité de victoire  $p$  est toujours la même et calculer  $p$ .

**Exercice 7.** On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit  $S_0 = x > 0$  le capital initial,  $c > 0$  le montant des revenus par an et  $X_n \geq 0$  le coût des dommages pour l'année  $n \geq 1$ . Le capital à la fin de l'année  $n$  est donc  $S_n = x + nc - \sum_{k=1}^n X_k$ . L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, i.e. si  $\tau = \inf\{k \geq 0 : S_k \leq 0\}$  est fini. On suppose les  $(X_k)_{k \geq 1}$  i.i.d. positives et telles que  $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] < \infty$ , pour tout  $\lambda > 0$ . Le but est ici de majorer la probabilité de ruine  $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{E}(X_1) > c$  implique  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ .
2. On suppose dorénavant que  $\mathbb{E}[X_1] < c$  et  $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$ . Soit  $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 - c)}]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\varphi''(\lambda) > 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(0) < 0$ , et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = +\infty.$$

Dessiner le graphe de  $\varphi$  et montrer qu'il existe un unique  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\mathbb{E}[e^{\lambda_0 X_1}] = e^{\lambda_0 c}$ .

3. Montrer que  $V_n = \exp(-\lambda_0 S_n + \lambda_0 x)$  est une martingale positive.
4. Pour  $N \geq 1$ , montrer que

$$\mathbb{E}[V_N \mathbf{1}_{\{\tau \leq N\}}] = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[V_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}] \geq e^{\lambda_0 x} \cdot \mathbb{P}(\tau \leq N).$$

5. En déduire que  $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$ .