

Fiche 3
CONVERGENCE DE MARTINGALES

Exercice 1. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de loi

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = q,$$

avec $p + q = 1$, et $0 < p < q < 1$. On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$.

1. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive. Vérifier que $Z_n \rightarrow 0$, p.s.
2. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k \wedge n})_{n \geq 0}$, et la décomposition

$$Z_{T_k \wedge n} = Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} + Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k = \infty\}},$$

montrer que

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3. En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n \geq 0} X_n\right] = \frac{p}{q - p}.$$

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_n = -1) = q$, avec $p + q = 1$ et $0 < p < 1$. On pose $S_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Pour tout θ réel, on note $\varphi(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta Y_1}]$, et pour tout $n \geq 0$,

$$X_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\varphi(\theta)^n}.$$

1. Donner le tableau de variation de la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et que dans le cas où $\theta \neq 0$, X_n converge p.s. vers 0.
3. Soit $T = \inf\{n > 0 : S_n = 1\}$. Montrer que pour $\theta > \max(0, \log(q/p))$,

$$\mathbb{E}[\varphi(\theta)^{-T} \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = e^{-\theta}.$$

En déduire que pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\mathbb{E}[s^T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs},$$

et $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, si $p \geq q$, $\mathbb{P}(T < \infty) = p/q$, si $p < q$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. On pose $M_0 = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$M_n = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right\}.$$

1. Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une v.a. notée M_∞ .
2. On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = +\infty$. Montrer que $M_\infty = 0$ p.s.
3. On suppose maintenant que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$. Montrer que $M_\infty > 0$ p.s. et que $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi commune $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Montrer la convergence p.s. de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs dans $[0, 1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a$, et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \dots \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z .
2. Montrer que $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[Z(1 - Z)]$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale. On suppose que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n| \ln^+(|X_n|)] < \infty$, et on se propose de montrer que $\sup_{n \geq 0} |X_n| \in L^1$, où $\ln^+(x) = \max(\ln(x), 0)$.

1. Montrer que pour tout $u \geq 1$, $\frac{1}{u} \ln u \leq \frac{1}{e}$.
2. À partir de l'inégalité maximale appliquée à la sous-martingale $|X_n|$, montrer que

$$\int_1^\infty \mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a) da \leq \mathbb{E}[|X_n| \ln^+(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|)].$$

3. En déduire que

$$\mathbb{E}[\sup_{n \geq 0} |X_n|] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n| \ln^+ |X_n|]).$$

Exercice 7. (Une preuve de la loi forte des grands nombres). Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de carré intégrable. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$, et $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Z_n)}{n^2} < \infty$. On pose pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j}, \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$, p.s. quand $n \rightarrow \infty$.
3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables, telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n\}}$. Montrer que
 - $\mathbb{E}[Y_n] \rightarrow \mathbb{E}[X_1]$, quand $n \rightarrow \infty$.
 - $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$.
 - $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.