

Fiche 4
EXEMPLES D'UTILISATION DES MARTINGALES

Exercice 1. (Chaînes de Markov, sous-martingales, et problème de Dirichlet). Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente sur un espace E fini ou dénombrable, et de matrice de transition P . Soit $U \subset E$ un sous-ensemble, dont le bord $\partial U := \{x \in U : \exists y \notin U, P(x, y) > 0\}$ est non vide (ce qui revient à dire que U et U^c sont non vide). On note

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial U\}.$$

Soit h une fonction bornée telle que $Ph(x) \geq h(x)$ pour tout $x \in U \setminus \partial U$ (une telle fonction h est dite sous-harmonique sur $U \setminus \partial U$).

1. Soit $x \in U$. On suppose que $X_0 = x$. Montrer que $(h(X_{n \wedge \tau}))_{n \geq 0}$ est une sous-martingale.
2. Montrer le principe du maximum, c'est-à-dire

$$\max_{x \in U} h(x) = \max_{x \in \partial U} h(x).$$

3. En déduire que si $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique bornée sur $U \setminus \partial U$, i.e. telle que $Pu(x) = u(x)$ pour tout $x \in U \setminus \partial U$, et telle que $h(x) = u(x)$ pour tout $x \in \partial U$, alors $h(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in U$. (C'est à ce résultat que l'on doit la terminologie de fonction "sous-harmonique" et de "sous-martingale").
4. Soit $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer qu'il existe une unique fonction bornée $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, qui est harmonique sur $U \setminus \partial U$, et telle que $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in \partial U$.

Exercice 2. (Enveloppe de Snell) Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration et $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus adapté et intégrable, i.e. tel que $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On se donne un entier N , et on s'intéresse à $S_N = \sup_{T \leq N} \mathbb{E}[X_T]$, où le sup est pris sur l'ensemble des temps d'arrêt T , tels que p.s. $T \leq N$. Un temps d'arrêt T_* est dit optimal si $\mathbb{E}[X_{T_*}] = S_N$. On définit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ par $M_N = X_N$ et pour $0 \leq n < N$,

$$M_n = \max(X_n, \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]).$$

1. Montrer que $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ est la plus petite surmartingale telle que $M_n \geq X_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$.
2. On considère $T_* = \min\{n \geq 0 : M_n = X_n\}$. Montrer que T_* est un temps d'arrêt, et que le processus $(M_k^{T_*})_{k \geq 0}$, défini par $M_k^{T_*} = M_{k \wedge T_*}$, est une martingale. En déduire que T_* un temps d'arrêt optimal.

Exercice 3. On considère le problème d'optimisation suivant. On cherche à se garer le plus près possible de l'entrée du bâtiment Braconnier qui se trouve en face de la place de parking $N \geq 1$. On suppose que toutes les places de parking sont alignées sur une droite infinie et placées au niveau des entiers positifs. Chaque place de parking est occupée avec probabilité $p \in [0, 1]$. On arrive sur le parking au niveau de la place 0, et on avance en ligne droite, sans possibilité de faire marche arrière, en ne découvrant si une place est vide ou occupée qu'au moment où l'on arrive à son niveau. On cherche la meilleure stratégie pour minimiser en moyenne la distance qu'il nous restera à faire à pied une fois garé.

Pour modéliser ce problème on considère $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p , et pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$. On pose ensuite $X_k = (k - N)\mathbf{1}_{\{\varepsilon_n=0\}} - \infty \cdot \mathbf{1}_{\{\varepsilon_n=1\}}$, si $k < N$, et $X_N = -\frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{\{\varepsilon_N=1\}}$.

1. Montrer que le problème revient à trouver un temps d'arrêt optimal T_* tel que $\mathbb{E}[X_{T_*}] = \sup_{T \leq N} \mathbb{E}[X_T]$, où le sup est pris sur l'ensemble des temps d'arrêt inférieurs à N .
2. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $T_* = \inf\{n \geq N - r_* : \varepsilon_n = 0\} \wedge N$, pour un certain $r_* \in \{0, \dots, N\}$, à déterminer.
3. Montrer que $r_* = \inf\{r \geq 0 : -1 + 2p^{r+1} \leq 0\} \wedge N$ (On notera en particulier que si $p \leq 1/2$, $r_* = 0$, et si $p = 0,9$, alors $r_* = 6$).

Exercice 4. (Modèle de Wright-Fisher) On considère une population de taille fixée $N \geq 1$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A . Chaque individu de la génération $n + 1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite du type de son parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On a alors que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant \mathcal{F}_n est une variable binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \dots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et discuter la convergence vers une variable X_∞ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. Montrer que $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$ et $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)]$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 5. (Urne de Pólya) On considère une urne contenant initialement b boules blanches et a boules rouges, où a et b sont des entiers strictement positifs. On suppose que l'on dispose à côté d'un stock infini de boules blanches et de boules rouges. À l'étape 1 on tire une boule au hasard dans l'urne: si elle est blanche, on remet cette boule dans l'urne en y ajoutant une boule blanche prise dans le stock; si elle est rouge on la remet dans l'urne et on y ajoute une boule rouge prise dans le stock. On fait de même à l'étape 2, 3, ..., en supposant qu'à chaque étape les tirages sont uniformes et indépendants. En particulier, à l'issue de l'étape n il y a $a + b + n$ boules dans l'urne. On note B_n le nombre de boules blanches après n tirages (avec la convention $B_0 = b$), et $X_n = B_n/(a + b + n)$ la proportion de boules blanches. On pose pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, \dots, B_n)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive bornée par 1. En déduire qu'elle converge p.s. et dans L^p , pour tout $p \in [1, \infty[$, vers une variable aléatoire X_∞ .
2. Montrer que $\mathbb{P}(X_\infty = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(X_\infty = 1) < 1$.
3. On fixe $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \geq 0$, on pose

$$Y_n^{(k)} = \frac{B_n(B_n + 1) \dots (B_n + k - 1)}{(a + b + n)(a + b + n + 1) \dots (a + b + n + k - 1)}.$$

Montrer que $(Y_n^{(k)})_{n \geq 0}$ est une martingale positive bornée par 1. En déduire qu'elle converge presque sûrement et dans L^1 vers une limite notée $Y_\infty^{(k)}$. Calculer $\mathbb{E}[Y_\infty^{(k)}]$ en fonction de b et a .

4. Montrer que $Y_\infty^{(k)} = (X_\infty)^k$, presque sûrement. En déduire $\mathbb{E}[(X_\infty)^k]$.
5. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ dont la loi admet la densité $f(x) = C_{a,b}(1-x)^{a-1}x^{b-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue (appelée loi Beta de paramètres a et b). Trouver la constante $C_{a,b}$. Montrer que $\mathbb{E}[Z^k] = \mathbb{E}[(X_\infty)^k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que Z et X_∞ ont même loi (en particulier si $a = b = 1$, X_∞ est une variable uniforme sur $[0, 1]$).

Exercice 6. (Processus de branchement) Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} . On considère une population partant d'un individu à la génération 0, et où tous les individus ont tous un nombre d'enfants de loi μ indépendamment des autres individus. On note Z_n le nombre d'enfants à la génération n , et $m = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(k)$. On suppose que $\mu(0) \neq 1$ et $\mu(1) \neq 1$.

1. Montrer que $M_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive et en déduire qu'elle converge p.s. vers une variable aléatoire notée M_∞ .
2. Montrer que si $m \leq 1$, alors la population s'éteint presque sûrement.
3. On suppose que $m > 1$, $\mu(0) \neq 0$, et on note $G(s) = \sum_{k \geq 0} s^k \mu(k)$, pour $s \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que G est une fonction strictement convexe qui admet un unique point fixe p dans $]0, 1[$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = G(\mathbb{P}(Z_n = 0))$, et en déduire que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ est la probabilité d'extinction de la population.
 - (c) On suppose que $\sum_{k \geq 0} k^2 \mu(k) < \infty$. Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^2 . En déduire que $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$, puis montrer que presque sûrement, $M_\infty > 0$ sur l'évènement de non-extinction.