Examen théorie des ensembles (26 février 2025)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés

1. Dans cet exercice on travaille dans ZF (sans l'axiome du choix).
   (a) Montrer que s'il existe une surjection $A \twoheadrightarrow B$, alors $|\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
   (b) Montrer que pour tout α, il existe une surjection $\mathcal{P}(\omega_\alpha) \twoheadrightarrow \omega_{\alpha+1}$.
   (c) En conclure que pour tout α, $\aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.
2. Un ordinal γ est dit *indécomposable* s'il n'y a pas d'ordinaux $\alpha, \beta < \gamma$ tels que $\gamma = \alpha + \beta$. Montrer qu'un ordinal γ est indécomposable si et seulement s'il est de la forme ω^α pour un ordinal α. (Ceci est l'exponentiation des ordinaux.)
3. Soit λ un cardinal de cofinalité ω qui est *fortement limite*, i.e., $2^\kappa < \lambda$ pour tout $\kappa < \lambda$. Montrer que $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$. (*Indication :* Pour le sens difficile écrire $\lambda = \bigcup_{n<\omega} B_n$ de manière que $|\mathcal{P}(B_n)| < \lambda$ pour tout n.)
4. On dénote par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Un ensemble $P \subseteq \mathbf{R}$ est dit *parfait* s'il est fermé et ne contient pas de points isolés. On a vu dans le cours que toute partie fermée F de $\mathbf{R}$ non dénombrable contient un ensemble parfait. Dans cet exercice on montrera qu'il faut une hypothèse sur F même si on remplace « non dénombrable » par « de cardinal $2^{\aleph_0}$ ». L'argument marche avec n'importe quel espace polonais non dénombrable à la place de $\mathbf{R}$.
   (a) Montrer que $|\{P \subseteq \mathbf{R} : P \text{ est parfait}\}| = 2^{\aleph_0}$.
   (b) Montrer qu'il existe une partie $A \subseteq \mathbf{R}$ de cardinal $2^{\aleph_0}$ qui ne contient pas d'ensemble parfait. (*Indication :* Énumérer les parties parfaites de $\mathbf{R}$ comme $(P_\xi : \xi < 2^{\aleph_0})$ et construire A par diagonalisation.)