Université Claude Bernard Lyon I 2024-25

Master I Logique mathématique — Théorie des Modèles

23 avril 2025

Les règles du jeu :

1. Vous pouvez utiliser tout résultat du cours... sauf si la question est de démontrer le résultat lui-même.

2. Les documents ne sont pas autorisés.

3. Détaillez vos réponses copieusement, rédigez-les soigneusement. Justifiez tout.

4. Si vous avez des questions sur quoi que ce soit, posez-les sans perdre de temps.

5. Vous avez 3 exercices et 2 heures. Bon travail...

Exercice 1 (Révisions de cours)

I. Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures dont on note M et N les ensembles sous-jacents respectifs. On admet qu'il y a un système de va-et-vient $\mathcal{F}$ entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que

(*) *pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$, tout $n \in \mathbb{N}$, toute formule $\phi(\overline{x})$ avec $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\overline{m} \in Dom(\sigma)^n$, $\mathcal{M} \models \phi(\overline{m})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi(\sigma(\overline{m}))$.*

Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$.

1. (1,5 pts) Montrer par récurrence sur la complexité des termes que pout tout terme $t(\overline{x})$ du langage $\mathcal{L}$, tout $\overline{m} \in \mathrm{Dom}(\sigma)^n$, $t^{\mathcal{M}}(\overline{m}) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ et $\sigma(t^{\mathcal{M}}(\overline{m})) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\overline{m}))$.
2. (0,5 pts) En déduire **(*)** pour les formules sans quanteurs.
3. (1 pt) Montrer **(*)** en toute généralité en utilisant la récurrence sur la complexité d'une formule.

II. (3 pts) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dont on note M l'ensemble sous-jacent. On augmente le langage $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}^+$ en ajoutant un symbole de constante c_m à $\mathcal{L}$ pour chaque $m \in M$. On considère dans le langage $\mathcal{L}^+$ l'ensemble des énoncés

$$\Delta(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}) | (m_1, \ldots, m_k) \in M^k \ (k \in \mathbb{N}),\ \phi(x_1, \ldots, x_k) \text{ est sans quanteurs}$$

$$\text{et satisfaite dans } \mathcal{M} \text{ par } (m_1, \ldots, m_k)\} \ .$$

Montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}$ est modèle de $\Delta(\mathcal{M})$ en tant que $\mathcal{L}^+$-structure, alors

$$\begin{array}{rccc} F & : & M & \longrightarrow & N \\ & & m & \longmapsto & c_m^{\mathcal{N}^+} \end{array} ,$$

est un plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ en tant que $\mathcal{L}$-structures.

III. (0,5 pts) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures d'ensembles sous-jacents M et N respectivement, et $A \subset M$. Montrer que si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{a} \in M^n$, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{a}/A)$.

Exercice 2 (Théories et modèles) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et T une $\mathcal{L}$-théorie. L'objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence suivante :

La théorie T est universelle si et seulement si elle est préservée par sous-structure.

Voici les définitions de quelques notions utilisées dans cet énoncé :

Une formule est dite *universelle* si elle est de la forme $\forall \overline{x} \phi(\overline{x})$ où $\phi(\overline{x})$ est une formule sans quanteurs. Une théorie universelle est une théorie axiomatisée par des énoncés universels.

On dit qu'une $\mathcal{L}$-théorie T est préservée par sous-structure si pour toutes $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ telles que $M \subset N$, si $\mathcal{N} \models T$ alors $\mathcal{M} \models T$.

1. (1 pt) Montrer que si T est universelle alors elle est préservée par sous-structure.

   Dans le reste de l'exercice, nous montrerons l'implication inverse qui nécessite un raisonnement moins direct. Nous admettons donc que T est préservée par sous-structure. On note $T_\forall$ l'ensemble des conséquences universelles de T.

2. (2 pts) Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $T_\forall$. On emprunte la notation de l'exercice 1.II dans le langage augmenté par des symboles de constantes pour les éléments de $\mathcal{M}$. Montrer que l'ensemble $T \cup \Delta(\mathcal{M})$ a un modèle. (*Indication : vous pouvez supposer que cet ensemble n'ait pas de modèle et appliquer la compacité.*)

3. (1 pt) Déduire du point précédent que $\mathcal{M} \models T$ et conclure.

Exercice 3 (La théorie d'une relation d'équivalence)

Soit $\mathcal{L}$ le langage $\{R\}$, où R est un symbole de relation binaire.

1. (1 pt) Écrire en premier ordre les énoncés suivants :
   - R est une relation d'équivalence.
   - Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une R-classe d'équivalence et une seule avec exactement n éléments.

2. (1 pt) Expliciter un modèle de ces énoncés.

   Nous noterons T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.

3. (1,5 pts) Montrer que T n'est pas modèle-complète. En déduire que T n'élimine pas les quanteurs.

   On rappelle qu'une théorie T du premier ordre est dite modèle-complète si toute inclusion de modèles de T est élémentaire. En d'autres termes toute sous-structure d'un modèle de T qui est aussi modèle de T est une sous-structure élémentaire.

4. (2 pts) Montrer que chaque modèle de T a une extension élémentaire qui contient une infinité de classes infinies. On dira qu'un tel modèle de T est *riche*.

5. (2 pts) Montrer en explicitant un système de va-et-vient que deux modèles riches de T sont ∞-équivalents. En déduire que T est une théorie complète.

6. (2 pt) Caractériser les modèles ω-saturés de T.

7. (1 pt) On définit $\mathcal{L}^E = \mathcal{L} \cup \{C_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ où chaque C_n est un symbole de relation 1-aire qui décrit l'appartenance à la classe d'équivalence à n éléments. Montrer que dans ce langage T élimine les quanteurs.

8. (1 pt) Dans le langage $\mathcal{L}^E$ décrire les 1-types sur $\emptyset$. Lesquels sont isolés ?

Exercice 4 (Les groupes ω-catégoriques) (2 pts) Dans cet exercice on travaille dans le langage des groupes. Soit $\mathcal{G}$ un groupe infini dont la théorie $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ est ω-catégorique. Montrer que G ne peut pas être de type fini.

Exercice 5 (Svenonius) Cet exercice a pour but de démontrer la moitié suivante du théorème dit de Svenonius :

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une partie définissable de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) *pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $x \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(x)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(x))$,*

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

Dans l'énoncé, on a noté D la formule définissant l'ensemble D. On gardera la même notation.

1. (1 pt) Montrer que la condition **(*)** équivaut à

Si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\alpha, \beta \in N^n$ on a $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\beta/A)$, alors $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

2. (3 pts) On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\alpha \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\alpha)$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \ldots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(c) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)\ \} \cup \ \{\neg D(c)\} \ .$$

En déduire l'existence d'une formule D_α dans $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\alpha(x) \to D(x))$ soit vrai.

3. (2 pts) Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\infty(x) \leftrightarrow D(x))$ soit vrai.