Feuille d'exercices 4

Actions

Exercice 1. Une action $G \curvearrowright X$ est dite *libre* si pour tout $g \neq e$ et tout $x \in X$: $g \cdot x \neq x$. Sont équivalents :

(a) L'action est libre.

(b) $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$.

(c) Pour tout $x, y \in X$ il existe au plus un g tel que $g \cdot x = y$.

Montrer que si l'action est libre, alors $|G| = |O|$ pour toute orbite O. Montrer que toute action libre est fidèle.

Exercice 2. Soit G un groupe et $H \leq G$.

- L'action $G \curvearrowright G/H$ est transitive, et $G_H = H$.
- Elle est libre si et seulement si $H = \{e\}$.
- Fidèle si et seulement si $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = \{e\}$.

Exercice 3. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive et fidèle et soit $a \in A$.

(a) Montrer que $\bigcap_{g\in G} gG_a g^{-1} = \{e\}$.

(b) Montrer que si G est abélien, alors $|G| = |A|$.

Exercice 4. (a) Montrer qu'il existe deux permutations dans S_8 qui engendrent un sous-groupe isomorphe à Q_8. Explicitez une paire de telles permutations.

(b) Montrer que Q_8 n'est isomorphe à aucun sous-groupe de S_n pour $n \leq 7$. (*Indication* : Montrer que si Q_8 agit sur un ensemble de cardinal ≤ 7, le stabilisateur de tout point contient le sous-groupe $\langle -1 \rangle$.)

Exercice 5 (Théorème de Cauchy)**.** Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Cauchy :

> Si G est un groupe fini et p est un facteur premier de $|G|$, alors G continent un élément d'ordre p.

Soit $E \subseteq G^p$ le sous-ensemble défini par

$$E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p : x_1 x_2 \cdots x_p = e\}.$$

(a) Quel est le cardinal de E ?

(b) Pour tout élément $\zeta = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E$ on pose $\sigma(\zeta) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$. Vérifier que σ conserve E et que l'application

$$\phi\colon \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times E \to E : (\overline{k}, \zeta) \mapsto \sigma^k(\zeta)$$

est une action du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +)$ sur E.

(c) Montrer que ζ est un point fixe de l'action si et seulement si $\zeta = (x, x, \ldots, x)$, où $x^p = e$.

(d) Montrer que toute orbite est de cardinal 1 ou p.

(e) Conclure, en vous servant de la partition de E en orbites.

Exercice 6. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et soit $H \lhd G$. Soient $O_1, O_2, \ldots, O_r$ les orbites de H sur A. On fixe $a \in O_1$ et on note par G_a le stabilisateur de a.

(a) Montrer que l'ensemble $\{O_1, \ldots, O_r\}$ est invariant par l'action $G \curvearrowright \mathscr{P}(A)$, i.e., G agit sur cet ensemble.

(b) Montrer que cette action et transitive.

(c) Montrer que tous les O_i ont le même cardinal qui est égal à $[H : H \cap G_a]$.

(d) Montrer que $r = [G : HG_a]$.

Exercice 7. (a) Considérons l'action naturelle $S_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ (l'action de S_n sur les parties de $[n]$ induite par son action sur $[n]$). Quelles sont ses orbites ?

(b) La même question pour l'action $A_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ pour $n \geq 3$.

Exercice 8. Soit G un groupe fini et soit le morphisme $\pi : G \to S_G$ donné par l'action $G \curvearrowright G$ par multiplication à gauche.

(a) Montrer que si $x \in G$ est d'ordre n et $|G| = mn$, alors $\pi(x)$ est le produit de m n-cycles.

(b) Montrer que si l'image de π contient une permutation impaire, alors G admet un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 9. Montrer que si $|G| = 2k$ avec k impair, alors G contient un sous-groupe d'indice 2. (*Indication :* Utiliser le théorème de Cauchy et l'exercice précédent.)

Exercice 10. Soit G un groupe fini, et p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p est distingué. (*Indication :* Étudier l'action $H \curvearrowright G/H$ et les cardinaux de ses orbites.)

Exercice 11. On fait agir un groupe d'ordre 143 sur une ensemble de cardinal 108. Montrer qu'il existe un point fixe pour cette action (c'est à dire, au moins un $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$).

Exercice 12. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini. Un *bloc* est une partie non vide $B \subseteq A$ telle que pour tout $g \in G$, $g \cdot B = B$ ou $g \cdot B \cap B = \emptyset$.

(a) Montrer que si $B \subseteq A$ est un bloc contenant l'élément a alors $G_B := \{g \in G : g \cdot B = B\}$ est un sous-groupe de G qui contient G_a.

(b) Montrer que $\{g \cdot B : g \in G\}$ est une partition de A.

(c) Un groupe transitif est dit *primitif* si les seuls blocs dans A sont les blocs triviaux : les singletons et A. Montrer que l'action $S_n \curvearrowright [n]$ est primitive. Montrer que l'action $D_8 \curvearrowright [4]$ ne l'est pas. Et l'action $D_{10} \curvearrowright [5]$?

(d) Montrer que l'action $G \curvearrowright A$ est primitive ssi pour tout $a \in A$ le stabilisateur G_a est un *sous-groupe maximal* de G, i.e., pour tout sous-groupe H tel que $G_a \leq H \leq G$, $H = G_a$ ou $H = G$.

Exercice 13. Quelles sont les classes de conjugaison dans les groupes suivants : S_3, A_4, D_8, Q_8 ?

Exercice 14. Soit G un groupe non abélien d'ordre 15.

(a) Montrer que $|Z(G)| = 1$;

(b) Montrer qu'il existe au plus une possibilité pour l'équation des classes de G.

(On verra plus tard qu'un tel groupe n'existe pas.)

Exercice 15. Soit $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$. Pour chacun des cas suivants trouver un élément explicite $\tau \in S_5$ tel que

(a) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$;

(b) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Exercice 16. Trouver des représentants pour toutes les classes de conjugaison de S_8 d'éléments d'ordre 4.

Exercice 17. (a) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

(b) Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

Exercice 18. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe A_n est simple pour tout $n \geq 5$. On rappelle le résultat du cours que le groupe A_5 est simple. Soit $n > 5$ et soit $N \lhd A_n$ un sous-groupe distingué non trivial.

(a) Montrer que si $x \in N$ et $y \in A_n$, alors le commutateur $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ est un élément de N.

(b) Soit $x \in N$, $x \neq e$. Montrer qu'il existe $y \in A_n$ tel que $[x, y]$ est non trivial et son support contient au plus 5 points.

(c) Soit $S \subseteq [n]$ tel que $|S| = 5$ et $S \supseteq \operatorname{supp}[x, y]$. On considère A_S comme un sous-groupe de A_n en étendant chaque permutation de A_S par l'identité en dehors de S. Montrer que $A_S \leq N$. En particulier N contient un 3-cycle.

(d) En déduire que $N = A_n$.

Exercice 19. Montrer que si n est impair, alors l'ensemble de tous les n-cycles consiste en 2 classes de conjugaison du même cardinal dans A_n.

Exercice 20. Montrer que si G est un groupe d'ordre impair, alors pour tout $x \in G$ différent de l'identité, x et x^{-1} ne sont pas conjugués.

Exercice 21. Soit $G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{C}, ac \neq 0 \right\}.$$

Montrer que tout élément de G est conjugué à un élément du sous-groupe H et donc $G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

Exercice 22. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et $|A| > 1$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$. (On rappelle que $\mathrm{Fix}(g) := \{a \in A : g \cdot a = a\}$.)

Exercice 23. Soit G un groupe fini, et $H \leq G$. Soit

$$X = \{gHg^{-1} : g \in G\}$$

l'ensemble des conjugués de H.

(a) Montrer que $|H| \mid |N_G(H)|$.

(b) En déduire que $|X| \mid [G : H]$.

Exercice 24 (La formule de Burnside)**.** On suppose que G est un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X.

(a) Montrer que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Ces deux sommes représentent deux manières de compter les membres d'un même ensemble, lequel ?

(b) Montrer la formule de Burnside : le nombre d'orbites de l'action est donné par

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 25. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et p un entier premier.

(a) On considère l'ensemble des bracelets constitués de p perles, chacune pouvant être coloriée de l'une des n couleurs. Deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet). Combien existe-t-il de bracelets distincts ?

(b) Même question, mais maintenant deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet) ou réflexion (on l'enlève, on le retourne, on le remet).

Exercice 26. Comme l'exercice précédent, mais on ne suppose plus que le nombre de perles est premier. On pourra se contenter du cas à six perles.

Exercice 27. Soit F un corps fini de cardinal q.

(a) Montrer que
$$|\mathrm{GL}(n,F)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1}).$$

(b) Calculer l'ordre de $\mathrm{SL}(n,F)$.

Exercice 28. Soit F un corps. Une matrice carrée sur F est appelée une *transvection* si elle est de la forme $I_n + aE_{ij}$ pour $i \neq j$, où I_n est la matrice identité, $a \in F$ et E_{ij} est la matrice dont les entrées sont 1 en position (i,j) et 0 ailleurs. Une matrice est appelée une *dilation* si elle est de la forme aI_n avec $a \in F^\times$.

(a) Décrire à quoi correspond la multiplication à gauche et à droite par une transvection.

(b) Montrer que les transvections sont des éléments de $\mathrm{SL}(n,F)$ et que $\mathrm{SL}(n,F)$ est engendré par elles. (*Indication :* On pourra utiliser récurrence sur n.)

(c) En conclure que $\mathrm{GL}(n,F)$ est engendré par les transvections et les dilations.