Examen théorie des ensembles (13 mars 2024)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés

1. Le but de cet exercice est de montrer (dans ZF) que l'énoncé

« Tout ensemble infini X est équipotent à son carré cartésien $X \times X$. » (*)

implique l'axiome du choix. Si A est un ensemble, notons par $h(A)$ l'ordinal de Hartogs de A (le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans A). Soit A un ensemble tel que $(A \cup h(A)) \times (A \cup h(A))$ est équipotent à $A \cup h(A)$. En travaillant dans ZF :

- (a) Montrer qu'il existe une injection $\pi : A \times h(A) \rightarrow A \cup h(A)$.
 - (b) Montrer que pour tout $a \in A$ il existe $\xi \in h(A)$ tel que $\pi(a, \xi) \in h(A) \setminus A$.
 - (c) En déduire que (*) implique l'axiome du choix.
2. On définit la suite $(\alpha_n : n < \omega)$ d'ordinaux par induction : $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ (ceci est l'exponentiation des ordinaux). Soit $\epsilon_0 = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. Lequel des ordinaux ϵ_0^ω et ω^{ϵ_0} est le plus grand ?
3. Soit κ un cardinal infini. Une famille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ est dite *presque disjointe* si tout $x \in \mathcal{A}$ est de cardinalité κ et si pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ distincts, $|x \cap y| < \kappa$. Une famille presque disjointe est dite *maximale* si elle n'est strictement contenue dans aucune autre famille presque disjointe.
- (a) Soit κ un cardinal infini régulier, et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ presque disjointe, avec $|\mathcal{A}| = \kappa$. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas maximale. (*Indication* : on pourra considérer une énumération $(A_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ des éléments de $\mathcal{A}$ et montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, $A_\alpha \setminus (\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta) \neq \emptyset$.)
 - (b) En déduire que pour tout cardinal κ infini régulier, il existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ presque disjointe avec $|\mathcal{A}| \geq \kappa^+$.
 - (c) Montrer qu'il existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ presque disjointe avec $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$. (*Indication* : on pourra travailler avec l'ensemble $2^{<\omega} := \{f : n \rightarrow 2 : n < \omega\}$ à la place d' ω .)
4. (a) Soit $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ une application strictement croissante et continue (i.e., telle que $\sup_{\alpha < \gamma} f(\alpha) = f(\gamma)$ pour tout $\gamma < \omega_1$ limite). Montrer que $\text{ran } f$ est un club.
- (b) Soient maintenant $f, g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ deux telles applications. Montrer que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = g(\alpha)\}$ est un club.