Université Claude Bernard Lyon 1 — Année 2023/2024
Master I — Introduction à la Logique mathématique

Partiel de théorie des modèles
02 mai 2024
Durée 3h (14h00-17h00)
L'uitlisation des notes du cours est des travaux dirigés est autorisée.

Exercice 1. Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire. Soit T la théorie qui exprime le fait que E est une relation d'équivalence ayant un nombre infini de classes d'équivalences et chaque classe d'équivalence est infinie.

1. Donner une axiomatisation de T.
2. Déterminer le nombre de modèles (à isomorphisme près) de T de cardinalité $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$.
3. La théorie T est-elle complète ?

Exercice 2. Une formule est *inductive* si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x};\bar{y}))$ où φ est une formule sans quanteurs. Si T est une théorie, $T_\forall$ (respectivement $T_{\forall\exists}$) est l'ensemble de énoncés universels (respectivement inductifs) conséquences de T.

1. Soient T et Γ deux théories telles que $\Gamma_\forall \subseteq T_\forall$. Montrer que tout modèle de T se plonge dans un modèle de Γ. [*Indication : montrer que la théorie* $\Gamma \cup \{\phi(\bar{m}) \mid \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}), \phi(\bar{x})$ *est sans quanteurs*$\}$, *où* $\mathcal{M}$ *est un modèle de* T*, est consistante.*]
2. Soit T une théorie telle que toute union de chaîne de modèles de T est un modèle de T. Montrer que $T_{\forall\exists}$ axiomatise T (i.e. tout modèle de $T_{\forall\exists}$ est un modèle de T). [*Indication : Si* $\mathcal{M}_0$ *est un modèle de* $T_{\forall\exists}$*, construire une chaîne* $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_1 \cdots$ *avec* $\mathcal{M}_i \models T_{\forall\exists}$, $\mathcal{N}_i \models T$ *et* $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$].
3. En déduire que toute théorie modèle-complète est axiomatisée par des axiomes inductifs.
4. Si T est une théorie, on dit d'un modèle $\mathcal{M} \models T$ que c'est un modèle *existentiellement clos* de T si chaque fois qu'on a $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T$ et si $\phi(\bar{m})$ est une formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$.

   Soit T une théorie axiomatisées par des axiomes inductifs et soit $\mathcal{M} \models T$.

   (a) Montrer que M est un modèle existentiellement clos de T si et seulement si $\mathcal{M}$ est un modèle existentiellement clos de $T_\forall$.

   (b) Montrer que T est modèle-complète si et seulement si tout modèle de T est un modèle existentiellement clos de T.

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de montrer le Théorème de Vaught qui stipule qu'il n'existe pas de théorie T complète dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$ ayant exactement deux modèles dénombrables (à isomorphismes près).

Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie complète de $\mathcal{L}$.

1. Montrer que tout type $p \in S_n(T)$ est réalisé dans un modèle dénombrable de T.
2. Montrer que si $S_n(T)$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors T admet un modèle atomique dénombrable. [*Indication : utiliser le théorème d'omission des types*].

3. Montrer que si $S_n(T)$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors T admet un modèle ω-saturé dénombrable. [*Indication : construire une chaîne* $\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_1 \preceq \cdots$ *telle que* $\mathcal{M}_{i+1}$ *réalise les types finiment réalisés dans* $\mathcal{M}_i$ *et montrer que* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i$ *est le modèle recherché.*].

Supposons maintenant par l'absurde que T est une théorie complète dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$ ayant exactement deux modèles dénombrables (à isomorphismes près).

4. Montrer que $S_n(T)$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que T a un modèle atomique dénombrable et un modèle ω-saturé dénombrable.
6. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in S_n(T)$ un type qui n'est pas isolé. [*Indication : penser à utiliser le théorème de Ryll-Nardzewski*].
7. Soit $\mathcal{M}$ le modèle dénombrable saturé de T et $\bar{a}$ une réalisation de p dans $\mathcal{M}$. On considère la théorie $\Gamma = Th(\mathcal{M}, \bar{a})$ dans le langage augmenté $\mathcal{L}(\bar{c})$.
   (a) Montrer que la théorie Γ n'est pas ω-catégorique. [*Indication : penser à utiliser le théorème de Ryll-Nardzewski*].
   (b) Montrer que $(\mathcal{M}, \bar{a})$ est le modèle ω-saturé (dénombrable) de Γ.
   (c) Montrer que Γ a un modèle atomique dénombrable. Que peut-on dire de sa restriction au langage $\mathcal{L}$?
8. En déduire que T admet au moins trois modèles dénombrables deux-à-deux non isomorphes.

Exercice 4 (Bonus). Soient T une théorie et $\mathcal{M}$ un modèle de T. On dit que $\mathcal{M}$ est *expansif* (resp. *finiment expansif*) - relativement à T - s'il existe un ensemble d'énoncés existentiels Γ (resp. un énoncé existentiel ψ) tel que $\mathcal{M}$ est modèle de Γ (resp. ψ) et tel que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T qui vérifie Γ (resp. ψ). On note $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ la classe des modèles $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N}$. On dit d'une classe de modèles $\mathcal{K}$ qu'elle est *axiomatisable (modulo T)* (*resp. finiment axiomatisable (modulo T)*) s'il existe un ensemble d'énoncés Γ (resp. un énoncé ψ) tel que $\mathcal{K}$ est la classe des modèles de $T \cup \Gamma$ (resp. $T \cup \{\psi\}$).

1. Montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ est axiomatisable modulo T si et seuelement si $\mathcal{M}$ est expansif.
2. Montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ est finiment axiomatisable modulo T si et seulement si $\mathcal{M}$ est finiment expansif.
3. Donner un exemple d'une théorie T ayant un modèle expansif $\mathcal{M}$ qui ne soit pas finiment expansif.