Feuille 1

Exercice 1 (Axiomes.)

1. Donner un exemple d'un univers dans lequel l'axiome d'extensionnalité n'est pas vrai.
2. Montrer que l'axiome de l'ensemble vide est équivalent à l'existence d'un ensemble (autrement dit au fait que $V \neq \emptyset$).

Exercice 2 (Ensembles.) Soit x et y deux ensembles.

1. Montrer que $x \cup y$ et $x \cap y$ sont des ensembles.
2. Montrer que $S(x)$ est bien un ensemble.

Exercice 3 (Ensembles.) Soient X et Y des ensembles.

1. Montrer que la paire (X, Y) est un ensemble.
2. Montrer que le produit cartésien $X \times Y$ est un ensemble.

Exercice 4 (Ensembles.) Soit X un ensemble et R une relation d'équivalence sur X. Vérifier que chaque classe d'équivalence est un ensemble ainsi que le quotient X/R.

Exercice 5 (Axiome de fondation.) On rappelle que l'axiome de fondation est l'énoncé suivant : pour tout ensemble non vide x, il existe un ensemble $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$. Vérifier que cet axiome interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n<\omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n.

Exercice 6 (L'univers V et l'axiome de fondation.) On définit une hiérarchie d'ensembles (V_α) indexée par les ordinaux en posant :

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- Si α est limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1. Montrer que V_α est un ensemble transitif pour tout α.
2. Montrer que $\beta < \alpha$ ssi $V_\beta \in V_\alpha$, et que $\beta \leq \alpha$ ssi $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. Si x est un ensemble, on définit son *rang* $rg(x)$ en posant
$$rg(x) = \begin{cases} \text{le plus petit } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
Montrer que $rg(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α.
4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble x, il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$.
5. Montrer que la classe $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ satisfait les axiomes de ZF. En déduire que si Z est consistant, ZF aussi.

Exercice 7 (Ensembles ordonnés : ordres totaux, bons ordres, ordres denses.)

1. Montrer que toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné est bien ordonnée par rapport à la même relation d'ordre.

2. Montrer que le produit cartésien de deux ensembles totalement ordonnés, muni de l'ordre lexicographique défini à partir des deux ordres, est totalement ordonné. Que peut-on dire si les deux ordres sont bons ?
3. On munit $\mathbb{N}$ de son bon ordre usuel, noté $<$. Montrer que si $A \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble infini, alors $(A, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, <)$.
4. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que $(X, <)$ est un bon ordre si et seulement s'il ne contient pas de suite strictement décroissante d'éléments.
5. Montrer qu'un ensemble X muni d'un ordre total $<$ est fini si à la fois $<$ et son inverse définissent des bons ordres sur X.
6. On dira qu'une relation d'ordre total $<$ définie sur un ensemble X est *dense* si pour tous $a, b \in X$ distincts tels que $a < b$, il existe $c \in X$ différent de a et de b tel que $a < c < b$. Montrer que si X et Y sont deux ensembles dénombrables densement ordonnés et qui ne sont ni majorés ni minorés, alors ils sont isomorphes.

Exercice 8 (Plongements de bons ordres.) Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <')$ est une injection $f : X \longrightarrow Y$ qui préserve l'ordre : pour tous $x, x' \in X$, $f(x) < f(x')$ si et seulement si $x < x'$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 9 (Segments initiaux.)
A. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné $(X, <)$ qui contient un segment initial propre qui n'est pas de la forme $\{x \in X | x < a\}$ pour un certain $a \in X$.
B. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Notons I_X l'ensemble des segments initiaux propres de X et $\sigma : X \longrightarrow I_X$ qui associe à chaque $x \in X$ le segment initial propre $X_{<x} = \{y \in X | y < x\}$.

1. Vérifier que σ est injective.
2. Montrer que σ est surjective si et seulement si $(X, <)$ est un bon ordre.
3. Si $(X, <)$ est un bon ordre, montrer que $S(X) = X \cup \{X\}$ admet un bon ordre isomorphe à $(J_X, \subset)$, où J_X est l'ensemble de tous les segments initiaux de X.
4. Que peut-on dire de X si pour tout $x \in X$, $x = X_{<x}$?

Exercice 10 (Propriétés élémentaires des ordinaux.)

1. Montrer qu'un ordinal α est un entier naturel (donc, un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
2. Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si $\alpha = \sup\{\beta | \beta \in \alpha\}$.
3. Montrer que si α, β sont deux ordinaux et $f : \alpha \to \beta$ est strictement croissante alors $\alpha \leq \beta$.
4. Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors l'appartenance définit sur A une relation de bon ordre qui est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à α.

Exercice 11 (Somme ordinale.) Rappelons la définition par récurrence transfinie de la somme de deux ordinaux α et β :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0 \\ S(\alpha + \gamma) & \text{si } \beta = S(\gamma) \\ \sup\left(\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire une opération sur les bons ordres qui est équivalente :

1. Soient A et B deux ensembles bien ordonnés. Montrer que l'on peut supposer qu'ils sont disjoints.
2. On suppose maintenant $A \cap B = \emptyset$ et on considère $X = A \cup B$. Montrer que l'on peut définir de manière unique un bon ordre sur X prolongeant celui de A et celui de B (i.e. tel que l'ordre de X induise ceux de A et de B) et tel que A soit un segment initial de X.
3. Montrer que si A et B sont respectivement isomorphes aux ordinaux α et β alors X est isomorphe à $\alpha + \beta$.
4. En déduire les propriétés suivantes de l'addition ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) monotonie stricte à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$;
   (d) régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$;
   (e) non monotonie stricte à gauche et non régularité à droite ;
   (f) $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.

Exercice 12 (Multiplication ordinale.) Rappelons la définition par récurrence transfinie du produit de deux ordinaux α et β :

$$\alpha.\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ (\alpha.\gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\{\alpha.\xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Soient deux ordinaux α et β, nous allons définir un bon ordre sur l'ensemble $\alpha \times \beta$ qui sera isomorphe à l'ordinal $\alpha.\beta$:

1. On munit $\alpha \times \beta$ de l'ordre (anti-)lexicographique suivant

   $$(\gamma_1, \delta_1) < (\gamma_2, \delta_2) \text{ ssi } \delta_1 < \delta_2 \text{ ou } (\delta_1 = \delta_2 \ \& \ \gamma_1 < \gamma_2).$$

   Montrer que cela définit un bon ordre sur $\alpha \times \beta$.
2. Montrer que ce bon ordre est isomorphe à l'ordinal $\alpha.\beta$.
3. En déduire les propriétés suivantes de la multiplication ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) si $\alpha > 0$ et $\beta < \gamma$ alors $\alpha.\beta < \alpha.\gamma$;
   (d) si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha.\gamma \leq \beta.\gamma$;
   (e) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$;

Exercice 13 (Soustraction et division euclidienne sur les ordinaux.)

1. Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
   - $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
   - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

   Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2. Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta.\gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
   (Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta.\gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 14 (Puissance ordinale.) Rappelons la définition par récurrence transfinie de $\alpha > 0$ à la puissance β :

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^\gamma.\alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\left\{\alpha^\xi : \xi < \beta\right\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

1. Vérifiez les propriétés suivantes pour $\alpha > 0$, β et γ trois ordinaux :
   — si $\alpha > 1$ et $\beta > \gamma$ alors $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$;
   — $\alpha^\beta.\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;
   — $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta.\gamma}$.
2. Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^β est aussi dénombrable [1]
3. Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^\xi$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^\omega$?

Exercice 15 (Développement de Cantor.) On souhaite ici démontrer que tout ordinal admet un « développement en base ω », autrement dit que tout ordinal α non nul s'écrit de manière unique

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des ordinaux tels que $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$ et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers non nuls. On appelle ce développement le *développement de Cantor* de α.

1. Montrer que pour tout ordinal α on a $\omega^\alpha \geq \alpha$.
2. Montrer que pour tout ordinal α non nul il existe un unique couple (α_1, n_1) tel que
$$\omega^{\alpha_1} n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1}(n_1 + 1)\ .$$
3. En déduire qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \beta_1$.
4. Montrer l'existence du développement de Cantor et son unicité.
5. Montrer que les ordinaux de la forme ω^α sont exactement les ordinaux β tels que pour tout $\gamma < \beta$ on ait $\gamma + \beta = \beta$.
6. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant le développement de Cantor de α et celui de β.

1. en particulier, α^β ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est la puissance *cardinale*.