SONDERDRUCK

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN, Nr. 83

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN
Herausgeber:
E. BRIESKORN, J. FREHSE, ST. HILDEBRANDT,
F. HIRZEBRUCH, W. KLINGENBERG, R. LEIS,
I. LIEB, E. PESCHL, H. UNGER, W. VOGEL

Nr. 83

Martin Selbach

Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen

BONN 1976

Als Manuskript gedruckt im
Mathematischen Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen am 20. Januar 1976

KLASSIFIKATIONSTHEORIE
HALBEINFACHER
ALGEBRAISCHER
GRUPPEN

DIPLOMARBEIT

von

Martin Selbach

BONN

1973

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort

In dieser Arbeit sollen einige Tatsachen aus der Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen ausgeführt werden, die sich in der Literatur nirgends finden, obwohl sie im Prinzip bekannt sind : In [32] hat Prof. Tits grundlegende Klassifikationssätze sowie Klassifikationstabellen für alle fasteinfachen Typen und für vier Arten von Grundkörpern angegeben, auf die Ausarbeitung der Einzelheiten die Tabellen betreffend aber verzichtet. Nun wäre es in der Tat ein umfangreiches Programm, alle Fälle, die dabei auftreten, zu behandeln – das wird auch hier nicht geschehen : Wir beschränken uns darauf, die Indizes der Ausnahmegruppen über beliebigen Körpern zu bestimmen, die Klassifikation der gefundenen Formen anzugeben und schließlich die Existenzfragen zu untersuchen, die sich daran anschließen. Die Existenz über speziellen Körpern wird nur behandelt, wenn sie im gesteckten Rahmen offensichtlich ist.

All dies ist Inhalt des letzten Kapitels dieser Arbeit, während in den voraufgehenden die benötigte Theorie entwickelt wird. Die Darstellung lehnt sich eng an [32] an, wobei die Methoden aus [36] manchmal eine Vereinfachung zulassen.

Nach einigen Präliminarien über Galoiskohomologie algebraischer Gruppen in Kapitel I : Formenproblem, Twisten algebraischer Gruppen, Hilbert's Satz 90 für zerfallende Tori – wird in Kapitel II der Hauptsatz bewiesen : Eine halbeinfache algebraische k - Gruppe ist bis auf zentrale k - Isogenie durch ihren Index und ihren anisotropen Kern bestimmt .

Die Klassifikation ist also vollständig, wenn man alle anisotropen Gruppen und alle auftretenden Indizes kennt und wenn man weiß, welche anisotropen Gruppen als anisotroper Kern bei einer Gruppe von gegebenem Index vorkommen können. In [32] werden nun nur die beiden letzten Punkte untersucht :

Zunächst kann man mit elementaren Methoden – Invarianz unter der Oppositionsinvolution, Berechnung des relativen Wurzelsystems – bis auf wenige Ausnahmen alle möglichen (zulässigen) Indizes berechnen (Kapitel III) . Die hierzu benötigten Matrizen $M(\Delta)^{-1}$ sind im Anhang angegeben.

Wesentlich schwieriger ist es, Bedingungen zu finden, die der anisotrope Kern erfüllen muß. In Kapitel IV werden diese Fragen ([32], Prop. 4, 5, 6 und 7) untersucht. Aus kohomologischen Bedingungen erhält man schließlich eine darstellungstheoretische Umformulierung ([32], Prop. 5), die als zentrales Ergebnis die Klassifikation ermöglichen wird und die in vielen Fällen eine bequeme Bedingung an die Brauerinvariante des anisotropen Kerns ergibt.

Auf diesen Satz stützt sich dann die Klassifikation der Ausnahmegruppen im Kapitel V, die schon eingangs besprochen wurde.

Diese Arbeit unterscheidet sich nur in wenigen Punkten, die angefügt oder verbessert wurden, von der 1973 angefertigten Diplomarbeit gleichen Titels und in mancher Hinsicht wird man das nicht übersehen können.

Herrn Prof. Tits möchte ich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche Hilfen bei ihrer Anfertigung.

Viele Hinweise – besonders zu Kapitel V – verdanke ich auch Herrn Dr. J. C. Jantzen, dem ich hiermit ebenfalls meinen Dank aussprechen möchte.

KAPITEL 0

Bezeichnungen und Definitionen

1. Unter Körpern verstehen wir stets kommutative Körper. Ist k ein Körper, so bezeichnen wir mit k^* die multiplikative Gruppe der Elemente ungleich Null, mit k_s oder K eine separable Hülle und mit $\bar{k}$ einen algebraischen Abschluß von k. Wie üblich sei zu einer galoischen Erweiterung l/k die Galoisgruppe von l über k mit $\mathrm{Gal}(l/k)$ bezeichnet.

2. Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und A eine Menge, auf der G operiert. Ist $g \in G$, so bezeichnen wir den inneren Automorphismus bezüglich g mit $\mathrm{Int}(g)$ oder ${}^{g}?$:

$$\mathrm{Int}(g)(x) = {}^{g}x = g.x.g^{-1} \quad , \quad x \in G .$$

Ist $B \subset A$ eine Teilmenge, so definieren wir den Normalisator von B

$$N_G(B) := \{ g \in G \mid \text{für alle } a \in B \; : \; g.a \in B \}$$

Ist $A = G$, $B = H$ und operiert G mittels Int auf sich, so schreiben wir statt $N_G(H)$ einfach $N(H)$.

Der Zentralisator von B ist definiert durch

$$Z_G(B) := \{ g \in G \mid \text{für alle } a \in B \; : \; g.a = a \}$$

Im Fall $A = G$, $B = H$ schreiben wir wieder $Z(H)$.

Die unter H invarianten Elemente von B schreiben wir

$$B^H := \{ a \in B \mid \text{für alle } h \in H \; : \; h.a = a \}$$

Ist $C \subset G$ eine Untermenge, so bezeichnen wir die von C erzeugte Untergruppe mit $\langle g \mid g \in C \rangle$ oder $\langle C \rangle$.

Die Kommutatoruntergruppe schreiben wir als

$$D(G) := \langle g.h.g^{-1}.h^{-1} \mid g, h \in G \rangle .$$

Operiert G auf einer weiteren Gruppe G', so sei $G \ltimes G'$ (manchmal auch $G.G'$) das semidirekte Produkt von G nach G'. (siehe [4], I, 1.11.)

3. Zur Definition der algebraischen Gruppen, wie wir sie hier betrachten wollen, möchte ich auf Borel's Buch " Linear Algebraic Groups " ([4]) verweisen, dessen Bezeichnungen ich auch weitgehend übernommen habe. Eine kurze Zusammenfassung der hier benötigten Theorie findet man in [5] und [6]. Zur funktoriellen Definition algebraischer Gruppen, die wir auch gelegentlich benutzen werden, sei auf das Buch von Demazure-Gabriel " Groupes algébriques " ([16]) oder auf Cartier ([13]) verwiesen.

Sei G eine algebraische Gruppe über k definiert (eine algebraische k-Gruppe oder einfach G/k) im Sinne von [4] und sei k'/k eine Erweiterung, dann bezeichnen wir die Algebra der über k' definierten regulären Funktionen auf G mit $k'[G]$. Eine abgeschlossene über k definierte Untergruppe heißt k-Untergruppe.

Die k'-Gruppe, die man durch Körpererweiterung nach k' erhält, bezeichnen wir mit $G_{k'}$. Ist G' eine weitere algebraische k-Gruppe, so sei $\mathrm{Hom}_{k'}(G, G')$ die Gruppe der über k' definierten Morphismen von G nach G'. Insbesondere ist $\mathrm{Aut}_{k'}(G)$ die Gruppe der über k' definierten Automorphismen von G und als algebraische Gruppe ist $\mathrm{Aut}(G)(k') = \mathrm{Aut}_{k'}(G)$.

Ist l/k eine Erweiterung mit $l \subset k'$ und ist G'' eine algebraische l-Gruppe, so soll " $f : G \longrightarrow G''$ ist über k' definiert " oder " f ist ein k'-Morphismus " bedeuten, daß $f \in \mathrm{Hom}_{k'}(G_{k'}, G''_{k'})$ und wir schreiben auch f/k'.

Ist H eine k_s-Untergruppe von G und $\gamma \in \mathrm{Gal}(k_s/k)$, so sei ${}^{\gamma}H$ die konjugierte Untergruppe von H und $x \longmapsto {}^{\gamma}x$, $x \in G$ die Konjugationsabbildung zu γ (siehe: [4], A.G., 14. ; [25], Ch. II, § 4, S. 181ff.).

Für eine beliebige galoische Erweiterung l/k operiert $\mathrm{Gal}(l/k)$ auf $G(l)$ und es ist

$$G(k) = G(l)^{\mathrm{Gal}(l/k)}.$$

$\mathrm{Gal}(k_s/k)$ operiert auf $\mathrm{Hom}_{k_s}(G, G')$ durch

$${}^{\gamma}f := \gamma_? \circ f \circ \gamma_?^{-1} \qquad \text{für } f \in \mathrm{Hom}_{k_s}(G, G').$$

Die Operation ist also durch das folgende kommutative Diagramm erklärt

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_?"'] & G' \arrow[d, "\gamma_?"] \\ G \arrow[r, dashed, "{}^{\gamma}f"] & G' \end{tikzcd}$$

Dadurch wird $\mathrm{Aut}_{k_s}(G)$ zu einer $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ - Gruppe (im Sinne der Galoiskohomologie : s. [27]), d. h. die Operation von $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ auf $\mathrm{Aut}_{k_s}(G)$ ist mit der Gruppenstruktur von $\mathrm{Aut}_{k_s}(G)$ verträglich.

Die Definition des Restriktionsfunktors $R_{k'/k}$ kann man bei A. Weil nachlesen ([38] und [40]) oder gleich bei Demazure-Gabriel ([16], I, § 1, 6.6.).

Wir benutzen die folgenden Tatsachen :

Ist k'/k endlich separabel und sind $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_r$ die verschiedenen Injektionen von k' in $\bar{k}$, ist X eine algebraische k' - Gruppe, so gilt:

$$k'[R_{k'/k}(X)] \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^{r} k'[X]^{\gamma_i}$$

Der Restriktionsfunktor besitzt die folgende universelle Eigenschaft : Ist Y eine algebraische k-Gruppe und ist f ein über k' definierter Morphismus von Y nach X, so gibt es genau einen Morphismus $\psi \in \mathrm{Hom}_k(Y, R_{k'/k}(X))$, der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & & X \\ & R_{k'/k}(X) \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

(Zur Definition von p siehe [38].)

Eine <u>k- Isogenie</u> $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(G, G')$ zwischen algebraischen k-Gruppen G und G' ist ein surjektiver Morphismus mit endlichem Kern.

Eine <u>zentrale k-Isogenie</u> $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(G, G')$ ist eine k-Isogenie, so daß für alle k-Algebren A der Kern von $\varphi(A)$ zentral in $G(A)$ ist. Einzelheiten und wichtige Sätze über zentrale Isogenien findet man in [8].

KAPITEL I

Galoiskohomologie

§ 1 In diesem Kapitel möchte ich einige Ergebnisse aus der Galoiskohomologie algebraischer Gruppen bereitstellen, die in der Folge benötigt werden. Diese Ergebnisse sind wohlbekannt und die Darstellung schließt sich auch über weite Strecken an die Standardwerke zu dem Thema an; trotzdem wollte ich hier Einiges ein wenig ausführlicher erläutern, was sonst recht kurz abgehandelt wird.
Was zunächst die Definitionen und Ergebnisse aus der allgemeinen Gruppenkohomologie angeht, verweise ich auf Serre's "Cohomologie galoisienne" ([27], Ch. I, §§ 1, 2 und 5), dessen Bezeichnungen ich auch weitgehend übernommen habe. Weitere Referenzen zu diesem Thema sind: Serre's "Corps locaux" ([28]) sowie die Bücner von Shatz ([30]) und Babakhanian ([3]).
Der § 2 hat das Formenproblem algebraischer Gruppen zum Thema, wie es in [27], Chap. III entwickelt wird. Die Beziehung zwischen den Klassen von Formen und der ersten Kohomologie affiner algebraischer Gruppen habe ich abweichend von Serre und ausführlicher (allerdings auch spezieller) dargestellt.
Das Twisten algebraischer Gruppen stellt dann eine " explizite " Beziehung her, wozu aber im halbeinfachen Fall noch einige Informationen über die Automorphismengruppe zusammengetragen werden müssen (§ 3).
Im abschließenden Paragraphen wird Hilberts Satz 90 in der Form für zerfallende Tori und in der Verallgemeinerung auf Restriktionen zerfallender Tori bewiesen.

§ 2 Galoiskohomologie algebraischer Gruppen

2.1. Wir betrachten einen Körper k, eine endliche separable und normale Erweiterung k'/k mit Galoisgruppe $\Gamma' = \mathrm{Gal}(k'/k)$ und eine affine algebraische k-Gruppe G mit Algebra $A = k[G]$.
Dann operiert Γ' auf $G(k') = \mathrm{Mor}_k(A, k')$ und $G(k')$ wird zu einer Γ'-Gruppe im Sinne von [27], I, § 5.
Wir können also bilden

$$Z^1(\Gamma', G(k')) = Z^1(k'/k, G(k'))$$

$$H^1(\Gamma', G(k')) = H^1(k'/k, G(k'))$$

Statten wir Γ' und $G(k')$ mit der diskreten und $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ mit der Limes-Topologie aus, so ist mit den Inflationsabbildungen

$$H^1(k_s/k, G(k_s)) = \varinjlim_{\substack{k'/k \text{ endlich} \\ \text{galoisch}}} H^1(k'/k, G(k')).$$

Wir schreiben statt $Z^1(k_s/k, G(k_s))$ häufig auch $Z^1(k, G(k_s))$ oder einfach $Z^1(k, G)$ und entsprechend für die Kohomologie.
Haben wir eine exakte Sequenz algebraischer Gruppen

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ p\ } G/H \longrightarrow 1$$

so daß die Sequenz der k_s-rationalen Punkte exakt ist, so erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$1 \longrightarrow H(k) \xrightarrow{i_0} G(k) \xrightarrow{p_0} (G/H)(k) \xrightarrow{\delta} H^1(k,H) \xrightarrow{i_*} H^1(k,G) \xrightarrow{p_*} H^1(k,G/H)$$

Die Kohomologiemenge $H^1(k, H)$ " mißt also den Unterschied " zwischen $(G/H)(k)$ und $G(k)/H(k)$.

2.2. Das Formenproblem ([27], Chap. III ; [28], Chap. X ; [19])

Wir beziehen uns auf die Darstellung des Formenproblems bei Serre [27], Chap. III und übernehmen die Bezeichnung $E(k'/k, X)$ für die Menge der k-Isomorphieklassen von k'/k-Formen eines "Objektes" X.

Sei nun $A \in \Omega_k$, dann soll bezüglich Γ' eine Gruppe $\mathrm{Sem}(A_{k'})$ semilinearer Automorphismen von $A_{k'}$ und ein surjektiver Homomorphismus $\pi : \mathrm{Sem}(A_{k'}) \longrightarrow \Gamma'$ definiert sein.
Ist $\sigma \in \mathrm{Sem}(A_{k'})$ und $\pi(\sigma) = \gamma$, so nennen wir σ einen "γ - Automorphismus". Wir bezeichnen den Kern von π als $\mathrm{Aut}(A_{k'})$ und erhalten damit die exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_{k'}) \longrightarrow \mathrm{Sem}(A_{k'}) \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow 1 .$$

2.3.1. Definition : Ein Gruppenschnitt $h : \Gamma' \longrightarrow \mathrm{Sem}(A_{k'})$ heißt eine k - Struktur von $A_{k'}$.

2.3.2. Definition : Zwei k - Strukturen h und h' von $A_{k'}$ heißen äquivalent, wenn es ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(A_{k'})$ gibt mit $h' = \alpha \circ h \circ \alpha^{-1}$.

Dann erhalten wir $E(k'/k, A)$ als Menge von Klassen von Schnitten von π, wenn A bestimmte Bedingungen erfüllt, wenn nämlich $(A_{k'})^{h(\Gamma')}$ für alle Schnitte $h : \Gamma' \longrightarrow \mathrm{Sem}(A_{k'})$ eine k'/k - Form von A ist, also wenn $A_{k'}$ und $((A_{k'})^{h(\Gamma')})_{k'}$ isomorph sind.
Wir wollen das kurz am Beispiel von Vektorräumen und Algebren erläutern und gleichzeitig rechtfertigen.
Sei Ω_L die Menge der L - Vektorräume, L - Algebren bzw. L-Bialgebren dann ist die Abbildung $\Omega_k \longrightarrow \Omega_{k'}$, Tensorprodukt mit k' : $V_{k'} = V \otimes_k k'$ für $V \in \Omega_k$.
Ein γ - Automorphismus von $V_{k'}$ ist (bei Vektorräumen) eine Bijektion $\sigma : V_{k'} \longrightarrow V_{k'}$ mit

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \quad , x,y \in V_{k'}$$

$$\sigma(\lambda . x) = \gamma(\lambda) . \sigma(x) \quad , \lambda \in k', x \in V_{k'} .$$

Sei nun W eine k - Struktur (im üblichen Sinne) von $V_{k'}$ und $\beta : W \otimes k' \xrightarrow{\sim} V_{k'}$ ein zugehöriger Isomorphismus, dann definiert W in offensichtlicher Weise einen Schnitt h_W von π

$$h_W : \Gamma' \longrightarrow \mathrm{Sem}(V_{k'})$$
$$\gamma \longmapsto \beta \circ 1_W \otimes \gamma \circ \beta^{-1} ,$$

so daß $W = V_{k'}^{h_W(\Gamma')}$;
Ist umgekehrt $h : \Gamma' \longrightarrow \mathrm{Sem}(V_{k'})$ ein Schnitt, so operiert Γ' durch h auf $V_{k'}$ und $V_{k'}^{h(\Gamma')}$ ist eine k - Struktur von $V_{k'}$ (siehe [4], A.G., 14.2.).
Sei B eine k - Algebra und B_1 und B_2 k - Strukturen (wieder im üblichen Sinne) von $B \otimes k' = B_{k'}$ mit Isomorphismen

$$\beta_i : B_i \otimes k' \xrightarrow{\sim} B_{k'} \quad , i = 1, 2 .$$

Dann sind B_1 und B_2 äquivalent, wenn es einen k- Isomorphismus $f : B_1 \otimes k' \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes k'$ gibt, d.h. wenn ${}^{\gamma}f = f$ für alle $\gamma \in \Gamma'$ ist. Also ist $1_{B_1} \otimes \gamma = f^{-1} \circ (1_{B_2} \otimes \gamma) \circ f$.
Definieren wir nun $\alpha \in \mathrm{Aut}(B_{k'})$ durch $\alpha = \beta_2 \circ f \circ \beta_1^{-1}$, so ist

$$\begin{aligned} h_{B_2}(\gamma) &= \beta_2 \circ 1_{B_2} \otimes \gamma \circ \beta_2^{-1} \\ &= \alpha \circ \beta_1 \circ f^{-1} \circ 1_{B_2} \otimes \gamma \circ f \circ \beta_1^{-1} \circ \alpha^{-1} \\ &= \alpha \circ h_{B_1}(\gamma) \circ \alpha^{-1} \quad , \quad \gamma \in \Gamma' , \end{aligned}$$

also das was wir wollen.
Geht man umgekehrt davon aus, daß $h_{B_2} = \alpha \circ h_{B_1} \circ \alpha^{-1}$ ist, so ist $\beta_2^{-1} \circ \alpha \circ \beta_1$ ein k - Isomorphismus zwischen $B_1 \otimes k'$ und $B_2 \otimes k'$, der den Zusammenhang zwischen den Definitionen herstellt.
Wir kommen nun zu den affinen algebraischen Gruppen zurück. Die k'/k - Formen von G entsprechen 1 - 1 den k - Strukturen von $k[G] \otimes k' = A_{k'}$ und diese sollen hier untersucht werden.
Wir betrachten die Γ' - semilinearen Automorphismen $\mathrm{Sem}(A_{k'})$ von $A_{k'}$. Sei $\sigma : \Gamma' \longrightarrow \mathrm{Sem}(A_{k'})$ ein Schnitt, also für $\gamma \in \Gamma'$ $\sigma(\gamma)$ ein γ - linearer Automorphismus von $A_{k'}$. Dann operiert Γ' durch σ semilinear auf $A_{k'}$ und wie eben ist $A_{k'}^{\sigma(\Gamma')}$ eine k - Struktur von $A_{k'}$.
Die Operation von Γ' auf den k' - rationalen Punkten $\mathrm{Hom}_{k'}(A_{k'}, k')$ von G sieht dann folgendermaßen aus :
Für $p \in \mathrm{Hom}_{k'}(A_{k'}, k')$ und $\gamma \in \Gamma'$ ist $\gamma(p)$ durch das folgende kommutative Diagramm erklärt :

$$
\begin{aligned}
f^* : A' \otimes k' & \xrightarrow{\sim} k'[G] \\
a \otimes \lambda & \longmapsto \lambda \cdot a
\end{aligned}
$$

gehörende Morphismus $f : G \longrightarrow {}_{\xi}G$ gerade ξ zurück.
Wegen der Bijektivität von ρ erhalten wir damit Vertreter von allen
k - Isomorphieklassen von k'/k - Formen einer algebraischen k - Gruppe.
Setzen wir $k = k_s$, so erhalten wir im halbeinfachen Fall alle
k - Formen der Gruppe G und das Problem der Bestimmung aller
k - Formen ist äquivalent mit der Bestimmung von $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(G))$.

3.2. Die Struktur von Aut(G) bei halbeinfachen Gruppen ([19], § 3)

Aus der Theorie der zerfallenden Gruppen weiß man, daß es zu jeder halbeinfachen algebraischen k - Gruppe G eine über k zerfallende Form G^*, die entsprechende " Chevalleygruppe ", gibt. Wir können G^* durch inneren Automorphismus in $\mathrm{Aut}(G^*)$ einbetten :

$$\mathrm{Int} : G^* \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^*)$$

und man kann zeigen, daß Int durch die adjungierte Gruppe $\overline{G^*}$ faktorisiert :

$$
\begin{tikzcd}
G^* \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Aut}(G^*) \\
& \overline{G^*} \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

wobei i injektiv ist. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(G^*)/\overline{G^*} = \mathrm{Autext}(G^*)$ heißt die Gruppe der " äußeren Automorphismen " und ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\mathcal{D}) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Dyn}}(\mathcal{D})$, der Automorphismengruppe des Dynkin Diagramms $\mathcal{D}$ von G^*. Es ist $\mathrm{Autext}(G^*) = \mathrm{Sym}(\mathcal{D})$, falls G^* einfach zusammenhängend oder adjungiert ist. (Eine genauere Beschreibung findet man in [32], 1.5.3.)
Ist G eine beliebige halbeinfache k - Gruppe, so zerfällt G über k_s und wir haben eine exakte Sequenz :

$$1 \longrightarrow \overline{G}(k_s) \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}(G(k_s)) \xrightarrow{p} \mathrm{Autext}(G(k_s)) \longrightarrow 1$$

3.2.1. Definition : Eine k - Form G' von G heißt "innere Form" von G, falls die von G' definierte Kohomologieklasse im Bild von i_* liegt.

3.2.2. Definition : Sei $[\eta]$ die zu G gehörende Kohomologieklasse in $H^1(k, \mathrm{Aut}(G^*))$, dann heißt $p_*([\eta])$ die Diskriminante von G.

3.2.3. Bemerkung : G und G' sind innere Formen voneinander genau dann, wenn ihre Diskriminanten übereinstimmen :

Seien ξ und ξ' die von G und G' in $Z^1(k, \mathrm{Aut}(G^*))$ definierten Kozykel. Wir betrachten das folgende Diagramm :

$$
\begin{tikzcd}
H^1(k, \overline{G^*}) \arrow[r] & H^1(k, \mathrm{Aut}(G^*)) \arrow[r, "p_*"] & H^1(k, \mathrm{Autext}(G^*)) \\
H^1(k, {}_{\xi}\overline{G^*}) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(k, \mathrm{Aut}({}_{\xi}G^*)) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[u, "\tau_{\xi}"'] & H^1(k, \mathrm{Autext}({}_{\xi}G^*)) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

(dabei sei τ_{ξ} die in [27], I -64 definierte Bijektion, die [1] auf $[\xi]$ und $[\xi' . \xi^{-1}]$ auf $[\xi']$ abbildet.)
Ist $p_*([\xi]) = p_*([\xi'])$, so ist $p'_*([1]) = p'_*([\xi' . \xi^{-1}])$, also sind G und G' wegen der Exaktheit der Sequenz innere Formen voneinander.
Umgekehrt können wir G und G' als ${}_{\xi}G^*$ und ${}_{\xi'}G^*$ auffassen, und wir erhalten wie oben $p_*([\xi]) = p_*([\xi'])$.

3.2.4. Definition : Eine k - Form G^q von G^* heißt k - quasizerfallend, wenn sie eine über k definierte Boreluntergruppe besitzt.

Mit Hilfe der fundamentalen Sätze von Chevalley über zerfallende Gruppen kann man nun zeigen, daß es zu jeder halbeinfachen algebraischen k - Gruppe G eine k - quasizerfallende Gruppe G^q mit gleicher Diskriminante gibt, so daß also G eine innere Form von G^q ist.
Wir betrachten in G^* einen maximalen k - zerfallenden Torus T^* und eine k - definierte Boreluntergruppe B^*, die T^* umfaßt.
Sei $\mathrm{Aut}(G^*, B^*, T^*)$ die Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G^*)$, die T^* und B festläßt. Dann ist die Abbildung

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(G^*, B^*, T^*) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Autext}(G^*) \\
& \mathrm{Aut}(G^*) \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

surjektiv

und es existiert ein über k definierter Schnitt

$$s : \mathrm{Autext}(G^s) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^s, B^s, T^s) .$$

Daraus folgt sofort, daß die Abbildung

$$q_* : H^1(k, \mathrm{Aut}(G^s, B^s, T^s)) \longrightarrow H^1(k, \mathrm{Autext}(G^s))$$

surjektiv ist (sie ist sogar bijektiv).

Sei $H^1_q(k, \mathrm{Aut}(G^s)) := \{ [\xi] \in H^1(k, \mathrm{Aut}(G^s)) \mid {}_\xi G^s \text{ k-qu. zerf.} \}$

Dann ist $H^1_q(k, \mathrm{Aut}(G^s))$ isomorph zu $H^1(k, \mathrm{Aut}(G^s, B^s, T^s))$ (siehe dazu [19] § 3). Damit ergibt sich nun leicht der

3.2.5. Satz : Ist G eine halbeinfache algebraische k - Gruppe, so gibt es eine k - quasizerfallende k - Form G^q von G, so daß G eine innere Form von G^q ist.

Beweis : Ist G^s die zerfallende Form von G und $p_*([\xi])$ die Diskriminante von G, dann gibt es wegen der Surjektivität von q_* ein $[\eta] \in H^1(k, \mathrm{Aut}(G^s, B^s, T^s))$, so daß $p_*(i_*([\eta])) = p_*([\xi])$ und die zu $i_*([\eta])$ gehörende Form G^q ist die gesuchte Gruppe.

§ 4 Hilberts Satz 90

4.1. Hilberts Satz 90 für zerfallende Tori

Ein wesentliches Hilfsmittel für die weitere Entwicklung der Theorie stellt der berühmte Satz 90 von Hilbert dar, der die konomologische Trivialität k - zerfallender Tori garantiert. Einen Beweis findet man z.B. in [28], Chap. X , wegen der Wichtigkeit möchte ich ihn aber hier vollständig beweisen. Zunächst ein

4.1.1. Lemma : Seien T_1 und T_2 k - zerfallende Tori mit $T_1 \subset T_2$, dann gilt :

$$(T_2 / T_1)(k) \simeq T_2(k) / T_1(k) .$$

Beweis : Mit $T_3 = T_2 / T_1$ haben wir die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 1$$

und da T_1 direkter Faktor von T_2 ist auch :

$$1 \longleftarrow X^*(T_1) \longleftarrow X^*(T_2) \longleftarrow X^*(T_3) \longleftarrow 1$$

Da T_1 und T_2 k -zerfallend sind, ist es auch T_3 (siehe z. B. [7], § 1), also gilt : $X^*(T_i) = X^*(T_i)_k$ und $k[T_i] \xrightarrow{\sim} X^*(T_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ für $i = 1, 2, 3$. Das bedeutet , daß

$$T_i(k) = \mathrm{Hom}_k(k[T_i], k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T_i), k) .$$

Nun sind die $X^*(T_i)$ aber freie $\mathbb{Z}$ - Moduln, wir können also jeden Homomorphismus von $X^*(T_3)$ nach k auf $X^*(T_2)$ liften , d.h. die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T_2), k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T_3), k)$$

ist surjektiv, also ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow T_1(k) \longrightarrow T_2(k) \longrightarrow T_3(k) \longrightarrow 1$$

exakt.

4.1.2. Korollar : Sind T_1 und T_2 k - Tori mit $T_1 \subset T_2$, dann gilt:

$$(T_2 / T_1)(k_s) \xrightarrow{\sim} T_2(k_s) / T_1(k_s)$$

4.1.3. Satz : Sei k'/k eine endliche galoische Erweiterung, dann gilt:

$$H^1(k'/k, k'^*) = \{1\}$$

Beweis : [28] , Chap. X , Prop. 2

4.1.4. Korollar : $H^1(k, {}_k\mathrm{Mult}) = \{1\}$

4.1.5. Satz : (H.S. 90)
Sei S ein k - zerfallender Torus, dann gilt $H^1(k, S) = \{1\}$.

Beweis : Wir wählen einen k - zerfallenden Untertorus S_1 der Kodimension 1 . Nach Korollar 4.1.2. haben wir die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow S_1(k_s) \longrightarrow S(k_s) \longrightarrow {}_k\mathrm{Mult}(k_s) \longrightarrow 1$$

In der Kohomologie ergibt das

$$H^1(k, S_1) \longrightarrow H^1(k, S) \longrightarrow H^1(k, {}_k\mathrm{Mult})$$

Wegen Korollar 4.1.4. ist $H^1(k, {}_k\mathrm{Mult}) = \{1\}$, also ist

$$H^1(k, S_1) \longrightarrow H^1(k, S) \quad \text{surjektiv}$$

und die Behauptung folgt durch Induktion über Dim(S) .

4.1.6. Korollar : Sei G eine k - Gruppe und $S \subset G$ ein k - Torus, der über k' zerfällt, dann ist die folgende Sequenz exakt :

$$1 \longrightarrow S(k') \longrightarrow G(k') \xrightarrow{\pi} (G/S)(k') \longrightarrow 1$$

Beweis : 1) Wir zeigen zunächst, daß die Sequenz über k_s exakt ist. Sei dazu S zunächst eine beliebige abgeschlossene k - Untergruppe von G. Da π dominant und separabel ist ([4], II, §6), gibt es eine dichte offene Teilmenge $\Omega \subset G/S$, so daß für alle $p \in \Omega(k_s)$ die Faser $\pi^{-1}(p)$ eine dichte Menge separabler Punkte enthält ([4], A.G., 13.2.). Insbesondere ist also $\pi^{-1}(p)(k_s) \neq \phi$. Sei nun $x \in (G/S)(k_s)$: wir transformieren x mit $(\pi^{-1}(\Omega))^{-1}$ und erhalten : $x.(\pi^{-1}(\Omega))^{-1} \cap \Omega(k_s) \neq \phi$ also : $\pi^{-1}(x.(\pi^{-1}(\Omega))^{-1}) \cap G(k_s) \neq \phi$. Da $\pi^{-1}(x).(\pi^{-1}(\Omega))^{-1}$ offene Teilmenge von $\pi^{-1}(x.(\pi^{-1}(\Omega))^{-1})$ und $G(k_s)$ dicht ist, gilt auch : $\pi^{-1}(x).(\pi^{-1}(\Omega))^{-1} \cap G(k_s) \neq \phi$ also $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(\Omega).G(k_s) \neq \phi$ und damit $\pi^{-1}(x)(k_s) \neq \phi$. Also ist $\pi(k_s)$ surjektiv und 1) ist bewiesen.

2) Sei nun wieder S wie in 4.1.6. . Wegen 1) haben wir über k_s eine exakte Sequenz von $\mathrm{Gal}(k_s/k')$ - Mengen, die uns in der Kohomologie die exakte Sequenz punktierter Mengen liefert :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^0(k',S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(k',G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(k',G/S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(k',S) = \{1\} \\
1 \arrow[r] & S(k') \arrow[r] & G(k') \arrow[r] & (G/S)(k') \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Da die Abbildungen in dieser Sequenz automatisch die verlangten sind, folgt unsere Behauptung.

4.2. Verallgemeinerung auf induzierte Moduln

Sei H eine pro-endliche Gruppe, H' eine abgeschlossene Untergruppe von H und A eine diskrete abelsche H'- Gruppe, dann findet man bei Serre ([27], I-12 und I-74) die Definition des Funktors " induzierter Modul " $M_H^{H'}$. Im Fall $H' = \{1\}$ schreibt man einfach M_H und es ist $M_H(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[H], A)$ (siehe [28], Chap. VII, §1).
Ist H' ein abgeschlossener Normalteiler von H, so ist $M_H^{H'}$ isomorph zu $M_{H/H'}(A)$ (siehe [27], I-14) und es gilt:

$$H^1(H, M_H^{H'}(A)) \xrightarrow{\sim} H^1(H', A)$$

(siehe [27], I-12, Proposition 10).

Damit können wir den Zusammenhang zwischen Restriktion der Skalare und induzierten Moduln angeben :

Sei k'/k eine endliche galoische Erweiterung vom Grad n mit Galoisgruppe $\Gamma' = \{\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n\}$ und sei X eine kommutative affine algebraische k' - Gruppe mit Algebra $A = k'[X]$.
Sei $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ und $\overline{\Gamma} = \mathrm{Gal}(k_s/k')$, so daß $\Gamma' \xrightarrow{\sim} \Gamma/\overline{\Gamma}$ ist. Dann operiert $\overline{\Gamma}$ auf $X(k_s)$ und wir können den induzierten Modul $M_\Gamma^{\overline{\Gamma}}(X(k_s))$ bilden. Es gilt :

$$\begin{aligned}
R_{k'/k}(X)(k_s) &= \mathrm{Mor}_{k\text{-Alg}}(k[R_{k'/k}(X)], k_s) \\
&\simeq \mathrm{Mor}_{k'\text{-Alg}}(k'[R_{k'/k}(X)], k_s) \\
&\simeq \mathrm{Mor}_{k'\text{-Alg}}(\bigotimes_{i=1}^{n} A^{\sigma_i}, k_s) \\
&\simeq \mathrm{Mor}^n_{k'\text{-Alg}}(\prod_{i=1}^{n} A^{\sigma_i}, k_s) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\Gamma'], \mathrm{Mor}_{k'\text{-Alg}}(A, k_s)) \\
&\simeq M_{\Gamma'}(X(k_s)) \\
&\simeq M_{\Gamma/\overline{\Gamma}}(X(k_s)) \\
&\simeq M_\Gamma^{\overline{\Gamma}}(X(k_s)) .
\end{aligned}$$

4.2.1. Satz : Sei S ein k - Torus, k'/k eine endliche galoische Erweiterung, über der S zerfällt. Die Charaktergruppe $X^*(S)$ besitze eine $\mathrm{Gal}(k'/k) = \Gamma'$ - stabile Basis, dann gilt :

$$H^1(k'/k, S) = \{1\} .$$

Beweis : Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten :

1.) Es genügt den Satz in dem Fall zu beweisen, wo Γ' transitiv auf der Basis operiert.

Sei $\Delta \subset X^*(S)$ eine Basis und seien $\mathcal{O}_1, \ldots\ldots\ldots, \mathcal{O}_r$ die verschiedenen Orbits von Γ' in Δ. Wir betrachten

$$S_i := \Big(\bigcap_{\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}_i} \mathrm{Kern}(\alpha)\Big)^{o} \qquad \text{für } i = 1, \ldots\ldots, r.$$

Dann ist $X^*(S_i) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\alpha \in \mathcal{O}_i} \mathbb{Z}.\alpha$ und Γ' operiert auf der Basis $\mathcal{O}_i$ von $X^*(S_i)$ transitiv. Betrachten wir die Sequenz

$$1 \longrightarrow S_1 \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\pi} S/S_1 \longrightarrow 1$$

so ist nach Lemma 4.1.1. die Sequenz der k' - rationalen Punkte exakt und wir haben die exakte Kohomologiesequenz :

$$H^1(k'/k\,,\,S_1) \xrightarrow{i_*} H^1(k'/k\,,\,S) \xrightarrow{\pi_*} H^1(k'/k\,,\,S/S_1)$$

Nun ist $X^*(S/S_1)$ kanonisch isomorph zu $\coprod_{\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}_1} \mathbb{Z}.\alpha$ und Γ' operiert auf der Basis $\bigcup_{i=2}^{r} \mathcal{O}_i$ von $X^*(S/S_1)$ durch Einschränkung der Operation auf Δ.

Ist also $H^1(k'/k\,,\,S_1) = \{1\}$, dann ist π_* injektiv und die Behauptung folgt durch Induktion über r.

2.) Wir nehmen also an, daß Γ' transitiv auf Δ operiert. Dann sei $F \subset \Gamma'$ der Stabilisator eines Elementes $\alpha \in \Delta$ und $L = k'^F$ der Fixkörper von F. Sei $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_r\}$ die Menge der Einbettungen von L in k'. Dann ist

$$k'[S] = \coprod_{1 \le i \le r} \gamma_i\,(k'[\alpha, \alpha^{-1}])$$

und die Darstellung von Γ' wird induziert durch die Darstellung von F auf $k'[\alpha,\alpha^{-1}] = L[\alpha,\alpha^{-1}] \otimes k'$. Das bedeutet aber gerade

$$S \simeq R_{L/k}({}_L\mathrm{Mult})\;.$$

3.) Damit folgt der Rest des Beweises durch die zitierten Ergebnisse über induzierte Moduln :

$$\begin{aligned} H^1(k'/k\,,\,S) &\simeq H^1(k'/k\,,\,R_{L/k}({}_L\mathrm{Mult})) \\ &\simeq H^1(\Gamma', M^F_{\Gamma'}({}_L\mathrm{Mult})) \\ &\simeq H^1(F\,,\,{}_L\mathrm{Mult}) \\ &= \{1\} \qquad\qquad (\text{H.S. } 90)\;. \end{aligned}$$

KAPITEL II

Der Hauptsatz

§ 1 Der Satz von Witt klassifiziert die quadratischen Formen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum durch ihren Index und ihren anisotropen Anteil ([10], § 4 ; [23], Chap. XIV , § 5). Diese Begriffe sind der Ausgangspunkt für eine Verallgemeinerung auf halbeinfache algebraische Gruppen, in der wir im Spezialfall der orthogonalen Gruppen den alten Satz wiederfinden werden. Es wird also ein " Index " und ein " anisotroper Kern " eingeführt und das Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, daß durch diese beiden Daten und ihre zerfallende Struktur die Gruppe bis auf Isomorphie bestimmt ist.

In dieser Formulierung findet man den Satz zuerst 1959 bei J. Tits ([37] und [34]). Ausführlich behandelt wird er dann in [32] ; dort wird auch ein Beweis angegeben, der allerdings einen Fehler enthält, und es war ein Anlaß zu dieser Arbeit, einen neuen kohomologischen Beweis aufzuschreiben. Die Grundideen dazu sind schon in der Besprechung von [32] durch R. Steinberg in den " Mathematical Reviews " enthalten und werden eigentlich hier nur ausgeführt.

Einen Beweis für den Fall eines perfekten Grundkörpers findet man bei Satake ([26]).

Die Bedeutung dieses Satzes liegt nun darin, daß er das Problem der Klassifikation aller Formen einer Gruppe gegebenen Typs auf zwei Probleme reduziert, die man hofft leichter behandeln zu können :

Man bestimme zunächst alle möglichen Indizes und untersuche dann, welche anisotropen Kerne für diese Indizes in Frage kommen.

Diese Fragen werden ausführlicher in den folgenden Kapiteln behandelt.

Für den Rest der Arbeit vereinbaren wir - wie in [32] - folgende Bezeichnungen :

k : = Grundkörper , K/k separable Hülle von k , $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$.

§ 2 Bezeichnungen und Definitionen

Die Bezeichnungen dieses Paragraphen werden in der gesamten Arbeit weiter benutzt werden.

2.1. Sei G eine halbeinfache algebraische k - Gruppe, $S \subset G$ ein maximal k - zerfallender Torus und T ein maximaler Torus, der S enthält und über k definiert ist.
Die Charaktergruppen $X^*(T)$ und $X^*(S)$ seien mit verträglichen Ordnungen ausgestattet. Es sei $\Sigma = \Phi(T, G)$ das Wurzelsystem von T in G, $\Delta \subset \Sigma$ eine Wurzelbasis bzgl. der gewählten Ordnung, Σ^+ die Menge der positiven Wurzeln, $W(\Sigma) = W$ die Weylsche Gruppe und $\mathfrak{D}$ das Dynkin Diagramm. Sei $\Delta_0 \subset \Delta$ die Menge der auf S verschwindenden Wurzeln aus Δ und $\mathfrak{D}_0$ das zugehörige Dynkin Diagramm. Weiter sei ${}_k\Delta$ die Menge der nicht verschwindenden Einschränkungen von Wurzeln aus Δ auf S (die "k - Wurzeln" oder "relativen Wurzeln" von [7] und [32]) . Die Dimension von S , die wegen des Konjugationssatzes für Tori offensichtlich wohlbestimmt ist, heißt der k - Rang von G .

2.2. Wir betrachten nun den Zentralisator (bzgl. G) von S und seine abgeleitete Gruppe : $Z(S)$ und $D(Z(S))$.
Wir bezeichnen $D(Z(S))$ häufig mit G_0 und den maximalen zentralen anisotropen Torus von $Z(S)$ mit Z_a .

2.2.1. DEFINITION : Die Gruppe G_0 heißt halbeinfacher anisotroper Kern von G und die Gruppe $G_0 . Z_a$ heißt (reduktiver) anisotroper Kern von G .

2.2.2. Später werden wir auch noch die " halbeinfachen Kerne " von G benötigen (, die dann nicht mehr notwendig anisotrop sind) :
Sei $S' \subset G$ ein (nicht notwendig maximaler) k - zerfallender Torus von G , dann bezeichnen wir $D(Z(S'))$ als halbeinfachen Kern von G .

2.2.3. Bemerkungen :

i) Die anisotropen Kerne sind k - anisotrop :
Wäre nämlich $S_1 \subset G_0$ ein nicht-trivialer k - zerfallender Torus, so gäbe es einen maximal k-zerfallenden Torus $S_0 \subset Z(S)$, der S_1 enthielte und S und S_0 wären in $Z(S)(k)$ konjugiert. Da aber S zentral in $Z(S)$ ist, müßte $S_0 = S$ sein, also $S_1 \subset S$.
Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß $S \cap G_0$ endlich ist .

ii) $T_0 := T \cap G_0$ ist ein maximaler Torus von G_0 :
Da $T \subset Z(S)$, genügt es, die Situation in $Z(S)$ zu betrachten.
Sei also $T' \supset T_0$ ein Torus in G_0 . Dann gibt es einen maximalen Torus $T'' \subset Z(S)$ mit $T' \subset T''$. Da die maximalen Tori aber konjugiert sind, gibt es ein $g \in Z(S)(K)$ mit ${}^gT'' = T$.
Nun normalisiert $Z(S)$ aber G_0 , also bildet $\mathrm{Int}(g)$ G_0 in sich ab. Daraus folgt aber :

$$T' \subset T'' \cap G_0 \xrightarrow{\mathrm{Int}(g)} T \cap G_0 = T_0$$

Aus Dimensionsgründen muß also gelten : $T' = T_0$, also ist T_0 maximal.
Führt man in $X^*(T_0)$ eine mit der Ordnung von $X^*(T)$ verträgliche Ordnung ein, so sieht man mit der Beschreibung von $Z(S)$, wie sie in LEMMA 4.1.1. gegeben wird, daß $\mathfrak{D}_0$ ein Dynkin Diagramm für G_0 ist.
Entsprechendes gilt für die halbeinfachen Kerne.

iii) Ist $S = T$, so zerfällt G über k ; ist $G_0 = \{1\}$, also $Z(S) = T$, so sieht man mit den weiter unten zitierten Sätzen 2.3.1. und 2.3.2. leicht ein, daß G eine über k definierte Boreluntergruppe besitzt, also k-quasizerfallend ist.

iv) Wegen des Konjugationssatzes für Tori ist der anisotrope Kern (und der halbeinfache anisotrope Kern) bis auf k-Konjugation unabhängig von der Wahl von S und T .

2.3. Die übliche Operation von Γ auf $X^*(T)$ läßt Δ im allgemeinen nicht fest (wie man z. B. im reellen Fall sieht, wo $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ durch Inversenbildung auf $X^*(T)$ operiert, wenn G anisotrop ist). Um eine Operation, die Δ stabilisiert, mit den Charakteren von T zu definieren, muß man die übliche Operation " korrigieren ". Eine alternative Methode benutzt die Konjugationsklassen parabolischer Untergruppen zur Definition. Dazu einige Fakten über parabolische Untergruppen:

Sei $\theta \subset \Delta$ eine Untermenge, dann definiert man die Standard-parabolische Untergruppe P_θ zu θ durch :

$$P_\theta := \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in \Delta \text{ oder } -\alpha \in \theta \rangle$$

Wir wählen die folgende Zuordnung zwischen einfachen Wurzeln und maximalen Standard-parabolischen Untergruppen :

$$\alpha \in \Delta \longleftrightarrow P_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$$

Also entspricht Δ der Boreluntergruppe, die Δ definiert, und $\emptyset$ entspricht G. Für die Konjugationsklassen K-parabolischer Untergruppen, die wir mit $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \ldots\ldots$ bezeichnen, wird in [7] die folgende Ordnung eingeführt :

$$\mathcal{P} \prec \mathcal{P}' \iff \text{es gibt } P \in \mathcal{P} \text{ und } P' \in \mathcal{P}', \text{ so daß } P \subset P'$$

Die Konjugationsklasse von P_θ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_\theta$.

2.3.1. SATZ : ([7], § 4.3.)
In jeder Konjugationsklasse K - parabolischer Untergruppen gibt es genau eine Standard-parabolische Untergruppe P_θ für passendes θ.

2.3.2. SATZ : ([7], § 4, Théorème 4.16.)
Sei $P \subset G$ eine über k definierte parabolische Untergruppe. Dann ist die Leviuntergruppe von P der Zentralisator eines k - zerfallenden Torus.

2.3.3. SATZ : ([7], § 4, Cor. 4.17.)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent :
i) G besitzt einen nicht-trivialen k - zerfallenden Torus.
ii) G besitzt eine echte parabolische Untergruppe, die über k definiert ist.

2.3.4. Die Operation von Γ auf $G(K)$ induziert nun eine Operation von Γ auf den Konjugationsklassen K - parabolischer Untergruppen ([7], §6)

$$^{\gamma}\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_{\gamma^*(\theta)}, \quad \gamma \in \Gamma, \ \theta \subset \Delta$$

Durch die oben angegebene Zuordnung von einfachen Wurzeln auf Konjugationsklassen maximaler parabolischer Untergruppen haben wir also eine Operation von Γ auf Δ erklärt : die $*$ - Operation .
Die andere Definitionsmethode stellt gleichzeitig die Verbindung mit der üblichen Operation von Γ auf $X^*(T)$ her.
Wir hatten T als k - Torus angenommen, also zerfällt T über K, alle Charaktere sind über K definiert und Γ operiert auf $X^*(T)$ (übliche Operation) . Nun ist für $\gamma \in \Gamma$ $\gamma(\Delta)$ ein System einfacher Wurzeln für eine neue Ordnung. Da die Weylsche Gruppe einfach transitiv auf den Wurzelbasen operiert, gibt es genau ein $w_\gamma \in W(\Sigma)$, so daß $w_\gamma(\gamma(\Delta)) = \Delta$ und wir definieren : $\gamma^*(\alpha) := w_\gamma(\gamma(\alpha))$ für $\alpha \in \Delta$.
Ein Repräsentant von w_γ in $N(T)$ wird dann gerade $^{\gamma}P_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$ in $P_{\Delta \setminus \{\gamma^*(\alpha)\}}$ transformieren.

2.3.5. DEFINITION : Die Gruppe G heißt von innerem Typ (äußerem Typ), wenn die $*$ - Operation von Γ auf Δ trivial (nicht trivial) ist.

2.3.6. Bemerkungen :
i) Die Definition der $*$ - Operation hängt nicht von der Wahl von S und T ab : das ist wieder eine Folge des Konjugationssatzes für Tori.
ii) Die $*$ - Operation von G_0 ist die Einschränkung der $*$ - Operation von G auf $\mathcal{D}_0$. Ebenso erhält man für die halbeinfachen Kerne die $*$- Operation durch Einschränkung. (Für beliebige Untergruppen

gilt das nicht)

iii) Zerfällt G über k , so ist die * - Operation trivial.

iv) Die * - Operation ist ein Automorphismus des Dynkin Diagramms.

v) Die Bezeichnungen "innerer" und "äußerer Typ" sind kohärent mit den Bezeichnungen "innere und äußere Formen" :
Gibt es zwischen zwei k-Gruppen 'G und G′ einen Isomorphismus, dessen induzierte Abbildung der Diagramme mit der * - Operation kommutiert, so sind G und G′ innere Formen voneinander.
Insbesondere ist G genau dann von innerem Typ, wenn G eine innere Form einer zerfallenden Gruppe ist.

2.3.7. SATZ: ([7], § 6, 6.4.)
Sei $\theta \subset \Delta$ eine Untermenge, dann enthält $\mathcal{P}_\theta$ genau dann eine über k definierte parabolische Untergruppe, wenn gilt :

i) $\Delta_0 \subset \theta$ und

ii) $\gamma^*(\theta) = \theta$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

2.3.8. DEFINITION : Ein partieller Index von G ist ein Tripel $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0', *)$, wobei $\mathcal{D}_0'$ ein Unterdiagramm von $\mathcal{D}$ ist (mit Punktmenge Δ_0') , so daß $\mathcal{P}_{\Delta_0'}$ eine über k definierte parabolische Untergruppe enthält und * die oben eingeführte Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ ist. Statt $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0', *)$ schreiben wir oft $(\Delta, \Delta_0', *)$.

2.3.9. DEFINITION : $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, *)$ heißt der Index von G .

2.3.10. DEFINITION : Seien $(\Delta, \Delta_0, *)$ und $(\Delta', \Delta_0', *')$ Indizes, dann heißt $f : \Delta \longrightarrow \Delta'$ ein Indexisomorphismus, wenn

i) f ein Isomorphismus der zu Δ und Δ' gehörenden Dynkin Diagramme ist,

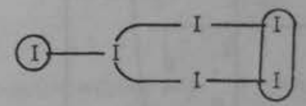
ii) $f(\Delta_0) = \Delta_0'$ und

iii) f mit den * - Operationen kommutiert, d.h. :

$$f \circ * = *' \circ f \, .$$

2.3.11. Für die diagrammatische Realisierung der Indizes schließen wir uns wieder den Konventionen von [32] an :
Die Orbits von Γ , die nicht zu Δ_0 gehören, werden umkreist gezeichnet und heißen ausgezeichnete Orbits. Bei Orbits, die mehr als ein Element enthalten, ist die genaue Operation von Γ aus dem Diagramm zu entnehmen.

Beispiel:



Die Orbits von Γ sind hier $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3\}$ und $\{6\}$, wobei $\{1,5\}$ und $\{6\}$ ausgezeichnet sind.
Die Indizes fast einfacher Gruppen werden mit ${}^tX^m_{n,r}$ bezeichnet.
Dabei bedeuten bei den Ausnahmegruppen :

X_n Typ des zugrundeliegenden Dynkin Diagramms

r k-Rang von G (= Anzahl der ausgezeichneten Orbits)

m Dimension des reduktiven anisotropen Kerns

t Ordnung des Bilds von Γ in Sym($\mathcal{D}$) .

Der oben gezeichnete Index ist also vom Typ ${}^2E^{16}_{6,2}$.

2.4. Das folgende Beispiel stellt die Beziehung her zwischem dem klassischen Witt-Index und den hier gegebenen Definitionen.
Sei k ein Körper der Charakteristik ungleich 2 und q eine quadratische Form in 2n+1 Variablen mit Witt-Index r . Dann kann man die Matrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform bezüglich einer passenden Basis in der Form schreiben :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & \\ \hline & & 0 & & \beta_0 \end{array}\right)$$

wobei β_0 die Null nicht darstellt.

Ein maximaler Torus von ${}_kSO_{2n+1}(q)$ ist :

$$S(\overline{k}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccccccc|ccc} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_1^{-1} & & & 0 & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & & & 0 & \\ & & & \lambda_2^{-1} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & \lambda_r & & & & \\ & & & & & & \lambda_r^{-1} & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \middle| \ \lambda_i \in \overline{k}^*,\ i=1,\dots,r \right\}$$

Wir haben :

$$D(Z(S))(\overline{k}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & A \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} \beta_0(x,y) = \beta_0(Ax, Ay) \\ x,y \in \overline{k}^{2n-r+1} \end{array} \right\}$$

Die ersten r einfachen Wurzeln (s. [11], Planche II) verschwinden nicht auf S und die restlichen verschwinden.
Da die $*$ - Operation bei B_n stets trivial ist, erhalten wir also den folgenden Index :

$$\underbrace{\text{I}-\text{I}\cdots\cdots\text{I}-\text{I}}_{r}-\underbrace{\text{I}\cdots\cdots\cdots\text{I}-\text{I}\Rightarrow\text{I}}_{n-r}$$

2.5. Der Torus S ist ein Untertorus von T , also können wir ihn durch Gleichungen von Charakteren von T beschreiben ([4], III, 8.2.).

2.5.1. LEMMA : ([7], § 6, Lemme 6.6.)
Seien T und T' K - zerfallende Tori von G , die beide einen maximal k - zerfallenden Torus S enthalten. Auf $X^*(T)$ und $X^*(T')$ seien Ordnungen eingeführt, die beide mit einer Ordnung von $X^*(S)$ verträglich sind. Seien Δ und Δ' die zugehörigen einfachen Wurzelsysteme und sei $g \in G$, so daß $Int(g)$ T in T' und die von $Int(g)$ induzierte Abbildung Δ' in Δ abbildet, dann gehört g zu $Z(S)$.

2.5.2. LEMMA : ([7], §6 , Prop. 6.7.)
Seien S , T , G , Δ_0 wie in 2.1. , dann gilt :
Für alle $\gamma \in \Gamma$ und $\chi \in X^*(T)$ ist $\gamma^*(\chi) - \gamma(\chi)$ eine $\mathbb{Z}$ - Linearkombination von Elementen aus Δ_0 .

Da S ein k - zerfallender Torus ist, haben wir für alle $\chi \in X^*(T)$:

$$\gamma^*(\chi)|_S = \chi|_S \quad , \text{ denn}$$

$$\gamma^*(\chi) - \chi = (\gamma^*(\chi) - \gamma(\chi)) + (\gamma(\chi) - \chi) .$$

Der erste Teil verschwindet auf S wegen Lemma 2.5.2. und der zweite, weil S über k zerfällt.
Betrachten wir nun :

$$S' := \left[\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta_0} Ker(\alpha) \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\beta \in \Delta \setminus \Delta_0 \\ \gamma \in \Gamma}} Ker(\beta - \gamma^*(\beta)) \right) \right]^0 ,$$

so ist S' ein Untertorus von T der Dimension : (Anzahl der Orbits von Γ in Δ) und offensichtlich gilt $S \subset S'$. Andererseits hat aber S gerade dieselbe Dimension (cf. [7], 6.8.) , also ist $S = S'$.

2.5.3. Bemerkungen :
i) Ist die $*$ - Operation trivial und G adjungiert, so ist $\mathbb{Z} . \Delta_0$ ein direkter Faktor von $X^*(T)$, also ist $\bigcap_{\alpha \in \Delta_0} Ker(\alpha)$ ein Torus und wir haben in diesem Fall : $S = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} Ker(\alpha)$.

ii) Aus der obigen Beschreibung von S folgt auch, daß zwei einfache Wurzeln α , $\alpha' \in \Delta$, die dieselbe Einschränkung $\neq 0$ auf S haben, zu einem Γ - Orbit (bzgl. der von der $*$ - Operation induzierten Operation) in $X^*(T)$ gehören.

§ 3 Zentrale Isogenieklassen

Die beiden folgenden Sätze werden es gestatten, den Index als Invariante zentraler Isogenieklassen aufzufassen.

3.1. SATZ: ([32], 2.6.1. ; [8'] 2.24. und 2.26.)
Sei G eine halbeinfache algebraische k - Gruppe. Dann gibt es eine einfach zusammenhängende k - Gruppe $\tilde{G}$ eine adjungierte k - Gruppe $\overline{G}$ und zentrale k - Isogenien $\tilde{\pi} : \tilde{G} \longrightarrow G$ und $\overline{\pi} : G \longrightarrow \overline{G}$. Die Gruppen $\tilde{G}$, $\overline{G}$ und die Isogenien $\tilde{\pi}$, $\overline{\pi}$ sind eindeutig bis auf k - Isomorphie.

3.2. SATZ: ([32], 2.6.3.)
Sind zwei halbeinfache k - Gruppen zentral k - isogen, so sind ihre Indizes isomorph und ihre anisotropen Kerne und halbeinfachen anisotropen Kerne sind zentral k - isogen.

Zum Beweis benötigen wir zwei Lemmata:

3.2.1. LEMMA: ([27], III-11)
Sei G eine algebraische k-Gruppe, $H \subset G$ eine K-Untergruppe, $N = N_G(H)$, $\tau \in Z^1(k, G)$ und $[\tau]$ seine Klasse in $H^1(k, G)$, $_\tau G$ die getwistete Gruppe (bzgl. inneren Automorphismen). Dann sind äquivalent:
i) $_\tau G$ enthält eine über k definierte Untergruppe H', die über K zu H konjugiert ist.
ii) $[\tau]$ gehört zum Bild von $H^1(k, N) \longrightarrow H^1(k, G)$.

Das folgende Lemma überträgt das auf den hier benötigten Fall:

3.2.2. LEMMA: Sei G eine halbeinfache k-Gruppe, $T \subset G$ ein maximaler k-Torus. Sei G' eine k-Form von G und T' ein maximaler k-Torus in G'. Dann kann man den Kozykel $\xi \in Z^1(k, Aut(G))$, der G' definiert so wählen, daß $\xi \in$ Bild$(Z^1(k, N_{Aut(G)}(T)) \longrightarrow Z^1(k, Aut(G)))$ und daß $_\xi T = T'$.

Beweis: Da T über K zerfällt, ist er in $G(K) = G'(K)$ zu T' konjugiert. Also ist Int(T) in Aut(G) über K zu Int(T') konjugiert und da T' über k definiert war, ist es auch Int(T') in Aut(G') = Aut(G).
Lassen wir Aut(G) durch innere Automorphismen auf sich operieren, so können wir Aut(G) mit ξ twisten und erhalten Aut($_\xi G$) = $_\xi$Aut(G).
Nun erfüllen aber $Int(T) \subset Aut(G)$ und ξ die Voraussetzungen von Lemma 3.2.1. i), also gilt

$$[\xi] \in \text{Bild}(H^1(k, N_{Aut(G)}(Int(T))) \longrightarrow H^1(k, Aut(G)))$$

Es gilt aber $N_{Aut(G)}(Int(T)) = N_{Aut(G)}(T)$, denn für $\alpha \in Aut(G)$ und $t \in T$ hat man:

$$Int(\alpha)(Int(t)) = Int(\alpha(t)) \text{, also gilt } ' \supset ' .$$

Ist umgekehrt $Int(\alpha)(Int(t)) \in Int(T)$, so gibt es $t' \in T$, so daß für alle $x \in G$ $\alpha(t).x.\alpha(t)^{-1} = t'.x.t'^{-1}$, also hat $t'^{-1}.\alpha(t) \in Z(G) \subset T$, also $\alpha(t) \in T$.
Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der Konjugation maximaler Tori.

Beweis von Satz 3.2.
1) Nach Satz 3.1. können wir uns auf den Fall einer Gruppe G und ihrer einfach zusammenhängenden Überlagerung $\tilde{G}$ mit zentraler k-Isogenie $\tilde{\pi} : \tilde{G} \longrightarrow G$ zurückziehen.

2) Seien G^* und $\tilde{G}^*$ die k-zerfallenden Formen von G und $\tilde{G}$ mit Isogenie $\tilde{\pi}^* : \tilde{G}^* \longrightarrow G^*$. Sei $\tilde{T}^*$ ein maximaler k-zerfallender Torus in $\tilde{G}^*$ und $T^* = \tilde{\pi}^*(\tilde{T}^*)$.
Wegen Lemma 3.2.2. können wir annehmen daß der von G in $Z^1(k, Aut(G^*))$ definierte Kozykel ξ aus $Z^1(k, N_{Aut(G^*)}(T^*))$ ist.
Wir identifizieren wieder G und $_\xi G^*$ und können ebenfalls nach Lemma 3.2.2. erreichen, daß $_\xi T^*$ ein beliebig vorgegebener maximaler k-Torus in G wird.

3) Wir bezeichnen mit $i : Aut(G^*) \longrightarrow Aut(\tilde{G}^*)$ die

von $\tilde{\pi}^*$ induzierte kanonische Injektion und mit
$i_* : Z^1(k, \mathrm{Aut}(G^*)) \longrightarrow Z^1(k, \mathrm{Aut}(\tilde{G}^*))$ die von
i induzierte Abbildung. Dann liegt $i_*(\xi)$ in $Z^1(k, N_{\mathrm{Aut}(\tilde{G}^*)}(\tilde{T}^*))$
und wenn wir $\tilde{G}$ mit $_{i_*(\xi)}\tilde{G}^*$ identifizieren, so ist
$_{i_*(\xi)}\tilde{T}^* = \tilde{T}$ das Urbild von T, unter $\tilde{\pi}$. Sei nun $S \subset T$ ein
maximal k-zerfallender Torus in G, dann ist nach [8], Théorème
2.20. (für separable Isogenien : [7], § 4, Prop. 4.25.)
$\tilde{S} := \tilde{\pi}^{-1}(S)$ in $\tilde{G}$ maximal k-zerfallend. Daraus folgt dann sofort:

$$\tilde{\pi}(Z(\tilde{S})) = Z(S) \quad , \quad \tilde{\pi}(D(Z(\tilde{S}))) = D(Z(S))$$

$$\text{und} \quad \tilde{\pi}(D(Z(\tilde{S})).\tilde{Z}_a) = D(Z(S)).Z_a$$

Die Indexisomorphie ist nun eine einfache Folgerung aus $\tilde{\pi}(\tilde{S}) = S$
und der Tatsache daß $\tilde{\pi}$ über k definiert ist.

3.2.3. In [8], 1.2. ist ein Beispiel von k-isogenen Gruppen angegeben, die verschiedene k-Ränge haben, deren Indizes also sicher nicht isomorph sind. Die Bedingung, daß die Isogenien zentral sind, ist also wesentlich.

§ 4 Der Hauptsatz

4.1. Wir benötigen zunächst einige Lemmata :

4.1.1. LEMMA : Mit den Bezeichnungen von 2.1. gilt :

$$\mathrm{Zentrum}(Z(S)) = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$$

Beweis :

1) Sei $\Phi_0 = \mathbb{Z}.\Delta_0 \cap \Phi(T, G)$, dann zeigen wir zunächst, daß $Z(S)$ von T und den U_α mit $\alpha \in \Phi_0$ erzeugt wird.
Sei $\alpha \in \Phi_0$ und $u_\alpha \in U_\alpha$, dann zentralisiert $u_\alpha = \theta_\alpha(x)$ S, denn :

$$\begin{aligned} u_\alpha . s . u_\alpha^{-1} &= s.s^{-1}.u_\alpha.s.u_\alpha^{-1} \quad , \quad s \in S \\ &= s.\theta_\alpha(\alpha(s^{-1}).x).u_\alpha^{-1} \\ &= s.\theta_\alpha(x).u_\alpha^{-1} = s \quad . \end{aligned}$$

Also haben wir : $\langle T, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_0 \rangle \subset Z(S)$.
Die U_α mit $\alpha \in \Phi_0$ sind aber auch die einzigen unipotenten Einparameter Untergruppen, die in $Z(S)$ enthalten sind :
Es seien $\Phi(S, G)$ die Wurzeln von S in G, dann gehört $\Phi(S, G)$ zum Bild des Einschränkungshomomorphismus $j : \Phi(T, G) \longrightarrow \Phi(S, G) \cup \{0\}$ und $j(\Delta) \setminus \{0\}$ ist eine Wurzelbasis von $\Phi(S, G)$. Dann gilt :

$$\sum_{\alpha_i \in \Delta} \lambda_i . \alpha_i \Big|_S = 0 \Longleftrightarrow \text{für alle } \bar{\alpha}_k \in j(\Delta) \sum_{\alpha_i \in j^{-1}(\bar{\alpha}_k)} \lambda_i = 0 .$$

Da alle Koeffizienten ≥ 0 oder ≤ 0 sein müssen, folgt :

$$\lambda_i = 0 \text{ für alle } \alpha_i \in \Delta \setminus \Delta_0 .$$

Nun ist $Z(S)$ zusammenhängend ([4], IV, II. 12.), also wird $Z(S)$ von T und den U_α, die es enthält, erzeugt ([7], 2.3.).

2) Damit kann man jetzt Zentrum(Z(S)) schnell berechnen :

$$S_1 := \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha) \quad \subset T \quad \text{und} \quad S_1 \subset \mathrm{Zentrum}(Z(S)) ,$$

wovon man sich durch Nachrechnen auf den U_α, $\alpha \in \Phi_0$, sofort überzeugt. Da das Zentrum von $Z(S)$ in allen maximalen Tori von $Z(S)$ enthalten ist, genügt es zu zeigen, daß keine größere Untergruppe $S' \supset S_1$ von T $Z(S)$ zentralisiert. Das ist aber klar.

4.1.2. KOROLLAR : Ist G adjungiert, so ist Zentrum(Z(S)) ein Torus.

Beweis : Wegen der Adjungiertheit von G ist $\mathbb{Z}.\Delta_0$ ein direkter Faktor von $X^*(T)$, also ist $\bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$ ein Torus.
Insbesondere sehen wir, daß

$$S_1 = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha) \quad \text{zusammenhängend ist.}$$

4.1.3. LEMMA : Sei G wieder adjungiert und $S_1 = \mathrm{Zentrum}(Z(S))$, dann hat $X^*(S_1)$ eine Γ-stabile Basis (unter der üblichen Operation).

Beweis : Nach Korollar 4.1.2. ist $S_1 = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$.
Betrachten wir die Einschränkung auf S_1 :

$$\mathrm{Ker}(j) = \coprod_{\alpha \in \Delta_0} \mathbb{Z}.\alpha \longrightarrow X^*(T) \xrightarrow{\ j\ } X^*(S_1)$$

so können wir $X^*(S_1)$ identifizieren mit einem Komplement von $\coprod_{\alpha \in \Delta_0} \mathbb{Z}.\alpha$ in $X^*(T)$. Wir wählen die Basis $\Delta_1 := \{ \alpha|_{S_1} \mid \alpha \in \Delta - \Delta_0 \}$ erhalten also $X^*(S_1) = \coprod_{\alpha \in \Delta_1} \mathbb{Z}.\alpha$.

Die $*$-Operation von Γ auf Δ_1' ist dann die Einschränkung der Operation auf Δ. Sei nun $\chi \in X^*(T)$, dann ist nach Lemma 2.5.2. $\gamma*(\chi) - \gamma(\chi) \in \coprod_{\alpha \in \Delta_0} \mathbb{Z}.\alpha$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Die beiden Operationen von Γ stimmen also auf $X^*(S_1)$ überein, d.h. die übliche Operation stabilisiert die gewählte Basis Δ_1.

4.1.4. LEMMA : Seien G, S, S_1 wie in Lemma 4.1.3. Sei $\overline{D(Z(S))}$ die adjungierte Gruppe zu $D(Z(S))$, dann gilt :

$$Z(S)/S_1 \xrightarrow{\ \sim\ } \overline{D(Z(S))}$$

Beweis : Zunächst bemerken wir, daß $Z(S)/S_1$ halbeinfach ist : Da S_1 nach Lemma 4.1.2. ein Torus und $Z(S)$ reduktiv ist, haben wir nämlich $R(Z(S)) = S_1$.

T/S_1 ist ein maximaler k - Torus von $Z(S)/S_1$. Da G adjungiert ist, gilt : $X^*(T) = \coprod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}.\alpha$.

Es genügt zu zeigen, daß $X^*(T/S_1)$ durch die Wurzeln von T/S_1 in $Z(S)/S_1$ erzeugt wird. Nach Korollar 4.1.2. ist $S_1 = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$.

$X^*(T/S_1)$ besteht aus den Charakteren von T, die auf S_1 verschwinden, also:

$$X^*(T/S_1) = \coprod_{\alpha \in \Delta_0} \mathbb{Z}.\alpha \ .$$

4.1.5. Lemma : Seien G und G' k - Gruppen, $\Phi : G \xrightarrow{\ \sim\ } G'$ ein K - Isomorphismus und sei $\mathrm{Ad}\Phi : \mathrm{Ad}G \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ad}G'$ über k definiert. Dann ist Φ schon über k definiert.

Beweis: Wir betrachten

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"'] & G' \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathrm{Ad}G \arrow[r, "\mathrm{Ad}\Phi", "\sim"'] & \mathrm{Ad}G' \end{tikzcd}$$

Da π, π' und $\mathrm{Ad}\Phi$ über k definiert sind, gilt für alle $\gamma \in \Gamma$: $\pi' \circ {}^{\gamma}\Phi = \pi' \circ \Phi$, also $\pi' \circ {}^{\gamma}\Phi \circ \Phi^{-1} = \pi'$.

Es genügt also zu zeigen, daß die Abbildung $\mathrm{Ad}: \mathrm{Aut}(G') \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Ad}G')$ $\Psi \longmapsto \mathrm{Ad}\Psi$ injektiv ist. Das ist aber klar !

4.2. SATZ : ([32] , Theorem 2)

Seien G und G' halbeinfache k-Gruppen und $\Phi: G \xrightarrow{\sim} G'$ ein K-Isomorphismus, der einen Indexisomorphismus induziert. Es sei ein k-Isomorphismus $\Psi : G_0 \xrightarrow{\sim} G_0'$ gegeben, so daß sich $\Phi|_{G_0}$ und Ψ nur um einen inneren Automorphismus unterscheiden. Dann sind G und G' schon über k isomorph.

Beweis : Wir übernehmen die Bezeichnungen von §2 . Nach Satz 3.2. und Lemma 4.1.5. genügt es, den Satz für adjungierte Gruppen zu beweisen. Die Voraussetzung über Φ besagt, daß es – evtl. nach Änderung von Φ um einen inneren Automorphismus – einen maximal k-zerfallenden Torus S' und einen maximalen k-definierten Torus T' mit $T' \supset S'$ in G' gibt, so daß $\Phi(S) = S'$ und $\Phi(T) = T'$.

1.) Sei S_1 das Zentrum von $Z(S)$, dann ist nach Korollar 4.1.2. S_1 ein Torus und nach Lemma 4.1.3. besitzt $X^*(S_1)$ eine Γ - stabile Basis. Ist $\overline{G_0}$ die adjungierte Gruppe von G_0, so gilt nach Lemma 4.1.4. : $Z(S)/S_1 \xrightarrow{\sim} \overline{G_0}$. Also haben wir wegen Korollar I, 4.1.6. die folgende exakte Sequenz :

$$1 \longrightarrow S_1(K) \xrightarrow{\ i(K)\ } Z(S)(K) \xrightarrow{\ p(K)\ } \overline{G_0}(K) \longrightarrow 1$$

Die exakte Kohomologiesequenz liefert :

$$H^1(k, S_1) \xrightarrow{\ i*\ } H^1(k, Z(S)) \xrightarrow{\ p*\ } H^1(k, \overline{G_0})$$

Nach Satz I , 4.2.1. ist aber $H^1(k, S_1) = \{1\}$, also ist $p_*^{-1}(1) = \{1\}$.

2.) Sei $\tau \in Z^1(k, \mathrm{Aut}(G))$ der durch Φ definierte Kozykel, also $\tau_\gamma = \Phi^{-1} \circ {}^{\gamma}\Phi$, für $\gamma \in \Gamma$. Da S und S' k-zerfallende Tori sind, ist $\Phi|_S$ über k definiert, also $\tau_\gamma \in Z_{\mathrm{Aut}(G)}(S)$. Nun induziert Φ einen Indexisomorphismus, also sind G und G' innere Formen voneinander, woraus folgt , daß $\tau \in Z^1(k, Z(S))$.

3.) Sei nun (1) der triviale Kozykel in $Z^1(k, Z(S))$. Betrachen wir die Bilder von (1) und τ unter p_* in $Z^1(k, \overline{G_0})$, so ist

$$G_0' \xrightarrow[k]{\sim} p_*((1))^{G_0} \quad \text{und} \quad G_0' \xrightarrow[k]{\sim} p_*(\tau)^{G_0} .$$

Nach Voraussetzung waren G_0' und G_0 k-isomorph, also sind $p_*(\tau)$ und $p_*((1))$ kohomolog in $\mathrm{Aut}(G_0)$. Wenn wir zeigen, daß $p_*(\tau)$ und $p_*((1))$ in $\overline{G_0}$ kohomolog sind, sind wir wegen $p_*^{-1}(1) = \{1\}$ fertig.

4) Nach Voraussetzung unterscheiden sich $\Phi|G_0$ und Ψ nur um einen inneren Automorphismus c von G_0, also:

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[dr, "\Psi"] & \\
 & G_0' \\
G_0 \arrow[uu, "c"] \arrow[ur, "\Phi|G_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Da Ψ über k definiert ist, haben wir:

$$\begin{aligned}
p_*(\tau)_\gamma &= \Phi|G_0^{-1} \circ {}^{\gamma}\Phi|G_0 \\
&= (\Psi \circ c)^{-1} \circ {}^{\gamma}(\Psi \circ c) \\
&= c^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ {}^{\gamma}\Psi \circ {}^{\gamma}c \\
&= c^{-1} \circ {}^{\gamma}c .
\end{aligned}$$

4.2.1. Bemerkung: Satz 4.2. läßt sich unmittelbar auf den Fall der partiellen Indizes und halbeinfachen Kerne verallgemeinern. (cf. [32], 2.7.2. d))

KAPITEL III

Zulässigkeitskriterien für Indizes

§ 1 Wir wollen in diesem Kapitel Indizes als "abstrakt gegeben" ansehen, d.h. uns reine Diagamm-Daten geben, bestehend aus einem Dynkin Diagramm $\mathcal{D}$, einer Operation $*$ der Galoisgruppe Γ auf $\mathcal{D}$ und einem Unterdiagramm $\mathcal{D}_0$ (die nicht ausgezeichnten Orbits von Γ). Es werden dann Kriterien dafür gesucht, wann ein solches Tripel $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, *)$ als Index einer halbeinfachen k-Gruppe auftreten kann. Die Indizes, bei denen das zutrifft, wollen wir "zulässig" nennen.

Es zeigt sich, daß die $*$-Operation mit der Oppositionsinvolution des Diagramms kommutieren muß. Zusammen mit der Bedingung, daß bei Entfernen ausgezeichneter Γ-Orbits eines zulässigen Index wieder zulässige Indizes auftreten müssen, ergibt sich ein starkes Zulässigkeitskriterium, das die Zahl der zulässigen Indizes weit einschränkt (§2).

Eine weitere Bedingung ergibt sich daraus, daß die nicht verschwindenden Einschränkungen von Wurzeln eines maximalen Torus T auf einen maximal k-zerfallenden Untertorus S wieder ein Wurzelsystem bilden. Diese Ergebnisse finden sich in § 3, wo auch Algorithmen zur Berechnung der relativen Wurzelsysteme und der relativen Weylgruppen nach [7] angegeben werden. Im Anhang findet sich dann eine Liste der auftretenden relativen Wurzelsysteme für alle zulässigen Indizes.

Schließlich werden in § 4 Zulässigkeitskriterien für spezielle Grundkörper angegeben.

Es sei noch bemerkt, daß die eleganteren Methoden der folgenden Kapitel auch die Indizes erfassen, die sich den hier erörterten Kriterien entziehen.

Die Sätze dieses Kapitels stützen sich wesentlich auf Ergebnisse aus [7], die fast immer ohne Beweise übernommen werden.

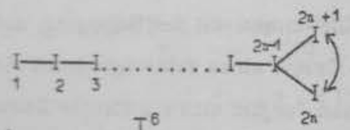
§ 2 Oppositionsinvolution und reduzierte Indizes

2.1. Sei Σ ein irreduzibles Wurzelsystem mit Weyl'scher Gruppe $W = W(\Sigma)$ und Basis Δ. Da die Weyl'sche Gruppe einfach transitiv auf den Basen von Σ operiert, gibt es genau ein $w_0 \in W$ mit $w_0(\Delta) = -\Delta$, also $w_0^2(\Delta) = \Delta$, also $w_0^2 = 1$ (siehe [11], Chap. VI, §1.6., Cor. 3). Daraus folgt, daß $i := -w_0|_\Delta$ ein involutorischer Automorphismus von Δ ist. Ist $-w_0 \in W$, so ist i trivial. Dieser Fall tritt auf bei den einfachen Wurzelsystemen vom Typ B_n, C_n, D_{2n}, E_7, E_8, F_4 und G_2.

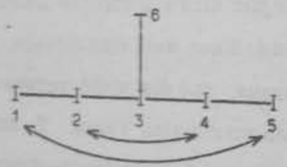
Bei den verbleibenden Fällen, sieht i wie folgt aus:

A_n 

$i : \alpha_j \longmapsto \alpha_{n-j+1}$

D_{2n+1} 

$$i : \begin{cases} \alpha_j \longmapsto \alpha_j, & \text{für } 1 \leq j \leq 2n-1 \\ \alpha_j \longmapsto \alpha_{2n-j-1} & \text{für } j \in \{2n, 2n-1\} \end{cases}$$

E_6 

$$i : \begin{cases} \alpha_j \longmapsto \alpha_{6-j} & \text{für } 1 \leq j \leq 5 \\ \alpha_6 \longmapsto \alpha_6 \end{cases}$$

Bemerkung: Die betrachteten Diagramme besitzen alle genau einen nicht trivialen Automorphismus. Umgekehrt sind die zusammenhängenden Diagramme vom Typ A_n, D_n und E_6 die einzigen, die einen nicht trivialen Automorphismus besitzen, und i ist nur im Fall D_{2n} nicht dieser Automorphismus.

2.2. Parabolische Untergruppen in Opposition ([7], § 4)

2.2.1. DEFINITION: ([7], § 4.8.) Seien P und P' parabolische Untergruppen von G. Dann heißen P und P' "in Opposition", wenn $P \cap P'$ eine gemeinsame Levi-Untergruppe ist.

2.2.2. DEFINITION: Zwei Konjugationsklassen parabolischer Untergruppen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ heißen "in Opposition", wenn es parabolische Untergruppen $P \in \mathcal{P}$ und $P' \in \mathcal{P}'$ in Opposition gibt.

Bei den Standard-parabolischen Untergruppen sieht die Situation folgendermaßen aus: Sei P_θ die zu $\theta \subset \Delta$ gehörende parabolische Untergruppe und $T_\theta := \left(\bigcap_{\alpha \in \theta} \operatorname{Ker}(\alpha)\right)^o$, dann ist $Z(T_\theta)$ eine Levi-Untergruppe von P_θ und $P_\theta^- = \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in -\Delta \text{ oder } \alpha \in \mathbb{Z}.\theta \rangle$ enthält $Z(T_\theta)$ als Levi-Untergruppe, ist also in Opposition zu P_θ.

Sei nun $n \in N(T)$ ein Element, das w_0 repräsentiert, dann gilt für alle Untermengen $\theta \subset \Delta$:

$${}^nP_\theta = P^-_{i(\theta)}$$

Das bedeutet gerade, daß die Konjugationsklassen $\mathcal{P}_\theta$ und $\mathcal{P}_{i(\theta)}$ in Opposition sind.

2.2.3. SATZ: ([7], Cor. 4.14.) Sei $\mathcal{P}$ die Konjugationsklasse parabolischer Untergruppen, die die minimalen k-parabolischen Untergruppen enthält. Sei $P \in \mathcal{P}$ und P' in Opposition zu P, dann ist $P' \in \mathcal{P}$.

Daraus folgt mit Satz II, 2.3.7. sofort:

2.2.4. Die Oppositionsinvolution läßt Δ_0 stabil.

Nach 2.2.2. ist die Konjugationsklasse $\mathcal{P}_{i(\theta)}$ in Opposition mit $\mathcal{P}_\theta$. Sind $P \in \mathcal{P}_\theta$ und $P' \in \mathcal{P}_{i(\theta)}$ über K definiert, so ist auch $P \cap P'$ über K definiert (s. [7], 4.7.), also ist ${}^\gamma(P \cap P')$ eine Levi-Untergruppe von ${}^\gamma P$ und ${}^\gamma P'$. Daraus folgt aber, daß $\mathcal{P}_{\gamma*(\theta)}$ und $\mathcal{P}_{\gamma*(i(\theta))}$ in Opposition sind, was gerade bedeutet, daß i mit der $*$-Operation kommutiert.

Wir fassen zusammen :

2.2.5. SATZ : ([32], 3.2.1.)
Der Index einer halbeinfachen k-Gruppe ist invariant unter der Oppositionsinvolution.

2.3. Reduzierte Indizes

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen von Kapitel II, 2.1. .
Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, *)$ ein zulässiger Index und sei $\mathcal{O}$ ein ausgezeichneter Orbit von Γ in Δ. Sei $\mathcal{D}'$ das Dynkin Diagramm, das man durch Entfernen von $\mathcal{O}$ aus $\mathcal{D}$ erhält. Dann konstruieren wir eine Gruppe H, die $(\mathcal{D}', \mathcal{D}_0, *_{|\mathcal{D}'})$ als Index besitzt - aufgefaßt als Teilindex von $\mathcal{I}$.
Seien $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ die verschiedenen ausgezeichneten Orbits von Γ in Δ, dann sei

$$S' := S \cap \left(\bigcap_{\substack{\beta \in \mathcal{O}_i \\ i=2,\ldots,r}} \mathrm{Ker}(\beta) \right)^0$$

Wie in Lemma II, 4.1.1. zeigt man, daß $Z(S')$ von T und den U_α mit $\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}$ erzeugt wird. Sei $H = D(Z(S'))$, $T' = T \cap H$, dann ist $\{\alpha_{|T'} \mid \alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}\}$ ein System einfacher Wurzeln von T in H und der Index von H ist der Teilindex $(\mathcal{D}', \mathcal{D}_0, *_{|\mathcal{D}'})$ von $\mathcal{I}$, wie man unmittelbar aus der Definition des Index abliest.

2.3.1. Wir wollen die Aussagen von Satz 2.2.5. und 2.3. an Indizes demonstrieren, deren zugrundeliegendes Diagramm $\mathcal{D}$ vom Typ A_n ist und die eine triviale $*$-Operation besitzen.
Nach Satz 2.2.5. müssen die ausgezeichneten Punkte symmetrisch zur Mitte des Diagramms liegen; das muß aber auch für die Teildiagramme gelten, die bei Entfernen ausgezeichneter Punkte entstehen (wegen 2.3.) . Die ausgezeichneten Punkte müssen also " gleichverteilt " liegen.
Genauer heißt das :

Seien die Punkte von $\mathcal{D}$ wie im Anhang numeriert und seien $a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_r$ die ausgezeichneten Punkte, dann heißt die oben aufgestellte Behauptung :

$$a_i = i \cdot \frac{n+1}{r+1}, \quad i = 1, \ldots\ldots, r.$$

Beweis : Induktion über r .
Für $r = 1$ folgt das direkt aus Satz 2.2.5. .
Sei $r > 1$, dann entfernen wir zunächst $\{a_r\}$. Die Induktionsvoraussetzung liefert für $i < r$:

$$a_i = i \cdot \frac{a_r}{r}$$

Entfernen wir $\{a_{r-1}\}$, so gilt : $a_r - a_{r-1} = n+1 - a_r$, also

$$2 \cdot a_r = n+1 + a_{r-1} = n+1 + (r-1) \cdot \frac{a_r}{r} = \frac{r(n+1) + (r-1)a_r}{r}$$

Daraus folgt : $(2r - r + 1)a_r = r(n+1)$, also :

$$a_r = r \cdot \frac{n+1}{r+1}$$ und schließlich :

$$a_i = i \cdot \frac{a_r}{r} = i \cdot \frac{n+1}{r+1} .$$

§ 3 Relatives Wurzelsystem und relative Weylgruppe

3.1. Bezeichnungen ([7], § 5)

Neben den Vereinbarungen von II, 2.1. führen wir ein :
Die Wurzeln von S in G heißen " k-Wurzeln " oder " relative Wurzeln " , das Wurzelsytsem $\Phi(S, G)$ heißt " relatives Wurzelsystem " und wird auch mit ${}_k\Phi$ bezeichnet. Die Gruppe $N(S)/Z(S)$, die wir auch ${}_kW$ schreiben, heißt " relative Weylgruppe " .
Nach [7], Théorème 5.3. wissen wir, daß der k-Rang von G gleich dem Rang von ${}_k\Phi$ ist, und daß wir ${}_kW$ als Weyl'sche Gruppe von ${}_k\Phi$ auffassen können. [7], Cor. 5.6. zeigt, daß ${}_k\Phi$ eine Invariante der zugehörigen zentralen Isogenieklasse ist.
Wie üblich heißt ein Skalarprodukt auf $X^*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ zulässig, wenn es invariant unter ${}_kW$ ist. Für eine gewählte Ordnung von ${}_k\Phi$ bezeichnen wir die einfachen Wurzeln mit ${}_k\Delta$.

3.2. Berechnung des relativen Wurzelsystems ([7], § 6, [32], 2.5.2.)

Sei R das von Σ und ${}_kR$ das von ${}_k\Phi$ erzeugte Gitter in $X^*(T)$ bzw. $X^*(S)$ und sei $j : R \longrightarrow {}_kR$ der Einschränkungshomomorphismus. Nach II, 2.5.3. wissen wir, daß $N = \mathrm{Ker}(j)$ von Δ_0 und $\{ \beta - \sigma^*(\beta) \mid \beta \in \Delta \setminus \Delta_0 , \sigma \in \Gamma \}$ erzeugt wird. Die Urbilder der einfachen relativen Wurzeln sind also - bei passender Ordnung von Σ und ${}_k\Phi$ - die ausgezeichneten Orbits von Γ in Δ.

Wir wählen in $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ein zulässiges Skalarprodukt $(?, ?)$. Dann können wir $Y = X^*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit $N^{\perp}$ identifizieren, die Einschränkung der Elemente von W, die S normalisieren, auf Y liefert gerade ${}_kW$ und das induzierte Skalarprodukt ist zulässig.

Für $\alpha, \beta \in \Delta$ sei $m_{\alpha,\beta} := (\alpha, \beta)$ und die durch die Elemente von Δ indizierte Matrix der $m_{\alpha,\beta}$ sei mit $M(\Delta)$ bezeichnet. Ist Σ einfach vom Typ X_y, so schreiben wir statt $M(\Delta)$ auch $M(X_y)$. Indizieren wir die Matrizen in $M_r(\mathbb{R})$ mit den Elementen von ${}_k\Delta$ (r = k - Rang von G) ebenso wie die Matrizen in $M_s(\mathbb{R})$ mit den Elementen von Δ, so sei die Abbildung $\rho : M_s(\mathbb{R}) \longrightarrow M_r(\mathbb{R})$ wie folgt erklärt :

$$\left(\rho \left(\left(c_{\alpha,\beta} \right) \right) \right)_{\delta,\eta} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ j(\alpha) = \delta}} \sum_{\substack{\beta \in \Delta \\ j(\beta) = \eta}} c_{\alpha,\beta}$$

Ist $M({}_k\Delta)$ mittels des zulässigen Skalarprodukts wie $M(\Delta)$ definiert, so gilt :

3.2.1. **SATZ :** ([7], Théorème 6.13. ; [32], 2.5.2.)

$$M({}_k\Delta) = \left(\rho \left(M(\Delta)^{-1} \right) \right)^{-1}$$

3.2.2. Zur vollständigen Bestimmung von ${}_k\Phi$ müssen wir zu jedem $\delta \in {}_k\Delta$ das größte $n_\delta \in \mathbb{N}$ bestimmen, so daß $n_\delta . \delta \in {}_k\Phi$. Sei $\lambda . \delta \in {}_k\Phi$ und sei $\beta \in \Sigma$ mit $j(\beta) = \lambda . \delta$, dann ist β Linearkombination von Elementen aus $\Delta_0 \cup j^{-1}(\delta)$, also :

$$\beta = \sum_{\alpha \in j^{-1}(\delta)} \lambda_\alpha(\beta) . \alpha + \sum_{\eta \in \Delta_0} \lambda_\eta(\beta) . \eta \quad \text{und}$$

$$\lambda = \sum_{\alpha \in j^{-1}(\delta)} \lambda_\alpha(\beta)$$

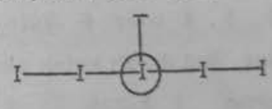
. Also sehen wir :

$$n_\delta = \underset{\beta \in \Sigma ,\ j(\beta) = \delta}{\mathrm{Maximum}} \left\{ \sum_{\alpha \in j^{-1}(\delta)} \lambda_\alpha(\beta) \right\}$$

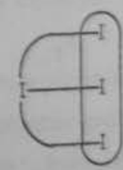
Daraus ergibt sich sofort die Berechnung von n_δ :
Wir betrachten den ausgezeichneten Orbit $\mathcal{O}$ zu δ und das von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{D}_0$ erzeugte Unterdiagramm $\mathcal{D}_{\mathcal{O},\delta}$ von $\mathcal{D}$. Seien $\mathcal{D}_i$ die zusammenhängenden Komponenten von $\mathcal{D}_{\mathcal{O},\delta}$. In den $\mathcal{D}_i$ nehmen wir die größten Wurzeln μ_i und bilden die Summe der Koeffizienten von μ_i, die zu den Wurzeln in $\mathcal{O}$ gehören.
Dann ist n_δ das Maximum dieser Summen.
Die Koeffizienten der größten Wurzel für die irreduziblen Wurzelsysteme sind im Anhang angegeben.

3.2.3. Da ${}_k\Phi$ ein Wurzelsystem ist, müssen die n_δ für alle $\delta \in {}_k\Delta$ gleich 1 oder 2 sein. Damit haben wir ein weiteres Zulässigkeitskriterium, mit dem z. B. die Indizes

,



und



ausgeschlossen werden können.

3.2.4. Im Anhang geben wir die $M(\Delta)^{-1}$ für alle irreduziblen Wurzelsysteme an und es findet sich auch eine Übersicht über die relativen Wurzelsysteme, die sich damit und mit 3.2.2. leicht bestimmen lassen. Dieser Liste kann man für die Ausnahmegruppen auch die zulässigen Indizes entnehmen.

3.3. Relative Weylgruppe ([7], 6.14. ; [32], 2.5.3.)

Mit der Berechnung von ${}_k\Phi$ hat man auch ${}_kW$ bestimmt :
Für $\delta, \eta \in {}_k\Delta$ seien r_δ und r_η die zugehörigen Spiegelungen und $n_{\delta,\eta}$ die Ordnung von $r_\delta \cdot r_\eta$ in ${}_kW$, dann ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{n_{\delta,\eta}}\right) = \frac{(\delta,\eta)^2}{(\delta,\delta).(\eta,\eta)}$$

Der folgende Satz liefert eine einfachere Methode zur Bestimmung der $n_{\delta,\eta}$, ohne daß man ${}_k\Phi$ berechnen muß :

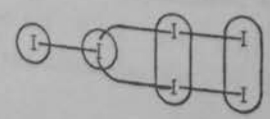
3.3.1. SATZ: ([7], Prop. 6.14.)
Seien $\delta, \eta \in {}_k\Delta$ und $\mathcal{O}_\delta$, $\mathcal{O}_\eta$ die zugehörigen ausgezeichneten Γ-Orbits in Δ. Sei f_0 (bzw. f_δ, bzw. f_η, bzw. $f_{\delta,\eta}$) die Anzahl der Wurzeln des reduzierten Wurzelsystems, das als einfache Wurzeln Δ_0 (bzw. $\Delta_0 \cup \mathcal{O}_\delta$, bzw. $\Delta_0 \cup \mathcal{O}_\eta$, bzw. $\Delta_0 \cup \mathcal{O}_\delta \cup \mathcal{O}_\eta$) besitzt, dann gilt:

$$n_{\delta,\eta} = 2\,\frac{f_{\delta,\eta} - f_0}{f_\delta + f_\eta - 2.f_0} .$$

Wieder erhalten wir ein Zulässigkeitskriterium dadurch, daß für $\delta \neq \eta$ $n_{\delta,\eta}$ gleich 2, 3, 4 oder 6 sein muß. Bei der Klassifikation stellt sich zwar heraus, daß damit keine neue Information zu den drei schon aufgeführten Kriterien (2.2.5. , 2.3. , 3.2.2.) geliefert wird, der Satz stellt aber eine bequem nachzurechnende Kontrolle dar.

3.4. Beispiele :

3.4.1. Wir berechnen zunächst das relative Wurzelsystem der quasi-zerfallenden Form vom Typ E_6 :

${}^2E^2_{6,4}$ 

Es ist :

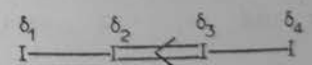
$$M(E_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen : ${}_k\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, den Γ-Orbit zu δ_i in Δ mit $\mathcal{O}_i$ und $\mathcal{O}_1 = \{1, 5\}$, $\mathcal{O}_2 = \{2, 4\}$, $\mathcal{O}_3 = \{3\}$, $\mathcal{O}_4 = \{6\}$, dann gilt :

$$\rho(M(E_6)^{-1}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+2+2+4 & 5+4+4+5 & 6+6 & 3+3 \\ 5+4+4+5 & 10+8+8+10 & 12+12 & 6+6 \\ 6+6 & 12+12 & 18 & 9 \\ 3+3 & 6+6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist das relative Wurzelsystem vom Typ F_4 :



Berechnen wir n_{δ_3,δ_4} zur Kontrolle auf die beiden angegebenen Methoden :

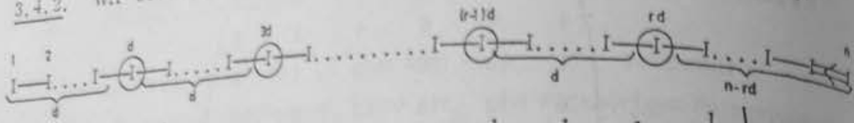
$$\cos\left(\frac{\pi}{n_{\delta_3,\delta_4}}\right) = \frac{(\delta_3,\delta_4)^2}{(\delta_3,\delta_3).(\delta_4,\delta_4)} = \frac{4}{2.4} = \frac{1}{2}$$

Also : $n_{\delta_3,\delta_4} = 3$.

Nach Satz 3.3.1. gilt : $n_{\delta_3,\delta_4} = 2\,\dfrac{f_{\delta_3,\delta_4} - f_0}{f_{\delta_3} + f_{\delta_4} - 2f_0} = 2\,\dfrac{6}{2+2}$

$= 3$

3.4.2. Wir betrachten den Index einer einfachen Gruppe vom Typ $C_{n,r}^{(d)}$:



$$M(C_n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \cdots\cdots 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \cdots\cdots 3 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 \cdots\cdots n-3 & n-3 & n-3 & \frac{n-3}{2} \\ 1 & 2 & 3 \cdots\cdots n-3 & n-2 & n-2 & \frac{n-2}{2} \\ 1 & 2 & 3 \cdots\cdots n-3 & n-2 & n-1 & \frac{n-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \cdots\cdots \frac{n-3}{2} & \frac{n-2}{2} & \frac{n-1}{2} & \frac{n}{4} \end{pmatrix}$$

Setzen wir $rd < n$ voraus, so erhalten wir :

$$\rho(M(C_n)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 & 1 \\ 1 & 2 \cdots\cdots 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \cdots\cdots r-1 & r-1 \\ 1 & 2 \cdots\cdots r-1 & r \end{pmatrix}$$

Die n_{δ_i} sind 1 für $i < r$ und $n_{\delta_r} = 2$, also ist ${}_k\Phi$ vom Typ BC_r .

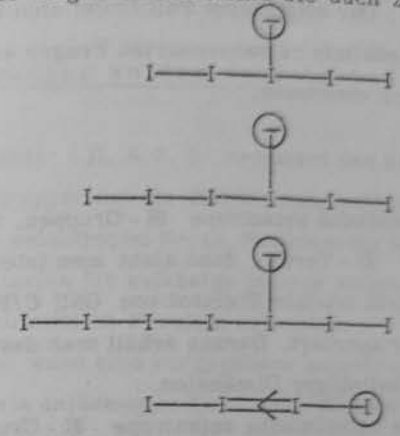
Falls $rd = n$, erhalten wir ein relatives Wurzelsystem vom Typ C_r .

3.5. Anwendung der Zulässigkeitskriterien

Da die Klassifikation der klassischen Gruppen nach der Methode von A. Weil (s. [39] und [32]) vorgenommen wird, setzen wir diese Ergebnisse voraus.

Mit den Methoden dieses Kapitels kann man dann ohne Schwierigkeit die Indizes bestimmen, die diesen Kriterien genügen.

Bis auf die vier folgenden Fälle sind sie auch zulässig :



Diese Indizes werden mit den Methoden von Kapitel V ausgeschlossen.

§ 4 Spezielle Körper

Für Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1 , für lokale Körper, sowie für $\mathbb{R}$ wollen wir Kriterien anführen, ohne weiter auf die Klassifikation einzugehen.

4.1. SATZ : (R. Steinberg [31], Théorème 11.1. ; s. auch [18], I)
Sei k ein Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1 (s. dazu [27], II-7) und G eine halbeinfache k-Gruppe, dann ist G k-quasizerfallend.

Für endliche Körper geht dieser Satz auf S. Lang zurück ([24]) .

4.2. SATZ : Sei k ein vollständiger, diskret bewerteter Körper mit perfektem Restklassenkörper der Dimension ≤ 1 .
Ist G eine absolut einfache halbeinfache anisotrope k-Gruppe, so ist G vom inneren Typ A_n .

Dieser Satz wurde für den Fall p-adischer Körper von M. Kneser bewiesen ([21]). Der allgemeine Fall findet sich bei Brunat und Tits ([12]). Weitere Resultate zu benachbarten Fragen kann man bei Harder ([19] , 4.2.) nachlesen.

4.3. $\mathbb{R}$

Wir betrachten halbeinfache anisotrope $\mathbb{R}$ - Gruppen. Sei zunächst T ein eindimensionaler $\mathbb{R}$ - Torus , dann sieht man leicht (s. z.B. [4], 8.16.) , daß das nicht triviale Element von Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) auf $X^*(T)$ durch Inversenbildung operiert. Daraus erhält man dasselbe Ergebnis für anisotrope Tori beliebiger Dimension.

Nehmen wir also eine halbeinfache anisotrope $\mathbb{R}$ - Gruppe , so operiert Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) auf der Charaktergruppe eines maximalen $\mathbb{R}$ - Torus durch Inversenbildung, also operiert Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) auf dem Dynkin Diagramm mit der Oppositionsinvolution.

KAPITEL IV

Bedingungen an den anisotropen Kern

§ 1 Der Hauptsatz (II, 4.2.) reduziert das Klassifikationsproblem halbeinfacher Gruppen auf die Bestimmung zulässiger Indizes und der dazu möglichen anisotropen Kerne. Nachdem im letzten Kapitel einige elementare Kriterien für zulässige Indizes aufgestellt wurden, wollen wir uns nun dem zweiten Problem zuwenden.

Wir fragen also, wann eine vorgegebene anisotrope Gruppe bis auf zentrale Isogenie als anisotroper Kern einer Gruppe von vorgegebenem Index auftreten kann (wobei noch gewisse Verträglichkeitsbedingungen zu erfüllen sind) . Es zeigt sich, daß außer den bisher untersuchten Invarianten zentraler Isogenieklassen noch eine weitere im Spiel ist, die in diesem und dem folgenden Kapitel eine Schlüsselstellung einnehmen wird : die Brauer-Invariante.

Nach einer genaueren Formulierung des Problems und Festlegung der benutzten Terminologie (§ 2) werden in den Paragraphen 3 und 4 kohomologische Bedingungen an die anisotrope Gruppe gestellt (Sätze 3.1.3. , 3.2.1. und 4.3.) , die den Propositionen 4 und 6 von [32] entnommen sind.

Diese Ergebnisse sind aber noch unhandlich und die weitere Entwicklung dient dazu, sie mit darstellungstheoretischen Methoden in leicht nachprüfbare Kriterien umzuformulieren. Dazu sind wir leider gezwungen, etwas auszuholen und die Begriffe und Definitionen, die nicht ohne weiteres "Standard" sind, kurz zu erläutern. Diese Vorbereitungen, die weitgehend Material aus [36] umfassen, werden in § 5 getroffen.

Der wichtige Satz 6.2. , dessen Beweis auch recht umfangreich ist, stellt die darstellungstheoretische Umformulierung der Sätze aus §§ 3 und 4 dar (in [32] : Proposition 5) und bildet die Grundlage für die spätere Klassifikation der Ausnahmegruppen. Für den Fall der inneren Formen ergibt sich mit Methoden aus [36] ein stark vereinfachter Beweis.

Obwohl diese Sätze (im wesentlichen 6.2.) im folgenden Kapitel nochmals in handlichere Kriterien umformuliert werden, geben wir schon an einem Beispiel an (6.3.), wie sie sich als Bedingungen an die Brauer-Invariante interpretieren lassen.

§ 2 Formulierung des Problems ([32], 3.4.)

Wir betrachten einen Index $\mathcal{J} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, *) = (\Delta, \Delta_0, *)$ und den Unterindex $\mathcal{J}_0 = (\Delta_0, \Delta_0, *|_{\Delta_0})$. Sei A eine einfach zusammenhängende halbeinfache k-anisotrope k-Gruppe, deren Index mit $\mathcal{J}_0$ identifiziert ist. Dann soll die folgende Frage betrachtet werden :

2.1. Unter welchen Bedingungen existiert eine k-Gruppe G mit Index $\mathcal{J}$, deren halbeinfacher anisotroper Kern zentral isogen zu A ist, wobei die Isogenie verträglich mit der Injektion $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}$ ist ?

2.2. Bemerkung : Da der anisotrope Kern von G nur bis auf zentrale Isogenie bestimmt sein soll, ist es keine Einschränkung A als einfach zusammenhängend vorauszusetzen.

2.3. Die folgenden Bezeichnungen sollen für den Rest des Kapitels verwendet werden :

Sei G^s eine k-zerfallende adjungierte Gruppe mit Dynkin Diagramm $\mathcal{D}$ und sei G^q eine k-quasi-zerfallende adjungierte Gruppe mit Dynkin Diagramm $\mathcal{D}$ und einer $*$-Operation von Γ auf $\mathcal{D}$, die mit der Operation des gegebenen Index übereinstimmt.

Sei T^s ein maximal k-zerfallender Torus in G^s und sei T^q ein maximaler k-Torus in G^q, der einen maximal k-zerfallenden Torus T^{qs} enthält.

Es soll nun analog zu II, 2.5. ein Untertorus $S^s \subset T^s$ bzw. $S^q \subset T^q$ durch Charaktergleichungen beschrieben werden, der isogen zu einem maximal k-zerfallenden Torus der gesuchten Gruppe G wird - falls sie existiert.

Dazu werden zunächst für die Charaktergruppen $X^*(T^s)$, $X^*(T^q)$ und $X^*(T^{qs})$ Ordnungen gewählt, wobei die Ordnungen von $X^*(T^q)$ und $X^*(T^{qs})$ verträglich sein sollen. Dann können wir die einfachen Wurzeln bezüglich dieser Ordnung mit den Punkten des Dynkin Diagramms $\mathcal{D}$ identifizieren und definieren :

$$S^q := \left(\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha) \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\beta \in \Delta \setminus \Delta_0 \\ \sigma \in \Gamma}} \mathrm{Ker}(\beta - \sigma^*(\beta)) \right) \right)^0$$

und entsprechend S^s.

Bilden wir dann $G_0^s := D(Z(S^s))$ und $G_0^q := D(Z(S^q))$, so können wir ihre Dynkin Diagramme mit $\mathcal{D}_0$ identifizieren und die $*$-Operation von G_0^q stimmt mit der von A überein.

Da G^q k-quasi-zerfallend ist, stimmen nach II, 2.5.2. auf $X^*(T^q)$ die beiden Operationen von Γ überein. Ist also $\alpha \in \Phi(T^q, G^q)$ und U_α die zugehörige Einparameter Untergruppe, so gilt ${}^\gamma U_\alpha = U_{\gamma^*(\alpha)}$ für $\gamma \in \Gamma$. Da aber $Z(S^q)$ von den U_α mit $\alpha \in \Sigma_0 = \Phi(T^q, G^q) \cap \mathbb{Z}.\Delta_0$ erzeugt wird, folgt daraus unmittelbar, daß G_0^q ebenfalls k-quasi-zerfallend ist.

Entsprechend sieht man ein, daß G_0^s k-zerfallend ist, denn nach II, 2.2., ii) ist $T^s \cap G_0^s$ ein maximaler Torus von G_0^s, also selbst zerfallend ([7], Cor. 1.6.).

Bezeichnen wir die einfach zusammenhängende Überlagerung von G_0^s mit $\widetilde{G_0^s}$ und die adjungierte Gruppe zu G_0^q mit $\overline{G_0^q}$, so definiert A einen Kozykel $\tau^s \in Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(\widetilde{G_0^s}))$ und ein $\tau^q \in Z^1(k, \overline{G_0^q})$.

Die folgenden Sätze über die Existenz von G werden nun Bedingungen an diese Kozyklen τ^s und τ^q stellen.

2.4. Bemerkung : Wir werden später auch die folgende Verallgemeinerung von 2.1. betrachten :
Setzt man nicht mehr voraus, daß A k-anisotrop ist und ersetzt man den Index durch einen partiellen Index (II, 2.3.8.) , so kann man die Frage betrachten, wann eine zu' A zentral isogene k-Gruppe als halbeinfacher Kern (II , 2.2.2.) einer Gruppe G mit partiellem Index $\mathcal{J}$ auftreten kann, so daß die Injektion der Indizes wie früher verträglich mit der zentralen Isogenie zwischen A und dem halbeinfachen Kern ist. Die Sätze 3.1.3. , 3.2.1. , 4.3. , 6.2. , 7.2. und 7.3. lassen sich unmittelbar auf diese Situation verallgemeinern.

§ 3 Kohomologische Bedingungen

3.1. Eine Bedingung an τ'

Zunächst einige Bezeichnungen :

3.1.1. DEFINITION : Sei

$$m : \Gamma \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$(\gamma, \alpha) \longmapsto m_\gamma(\alpha)$$

eine Operation von Γ auf $\mathcal{D}$, $\tau = (\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ein Kozykel in $Z^1(k, \mathrm{Aut}(G'))$ und $\overline{\tau} = (\overline{\tau}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ das kanonische Bild in $Z^1(k, \mathrm{Aut}(G')/\mathrm{Int}(G')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Aut}(\mathcal{D}))$.
Dann heißt τ "verträglich mit m" , wenn für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$\overline{\tau}_\gamma = m_\gamma \ .$$

3.1.2. DEFINITION : Sei H eine algebraische k-Gruppe und seien $\tau, \tau' \in Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(H))$, dann heißen τ und τ' "inner kohomolog" , wenn sie kohomolog bzgl. $\mathrm{Int}_K(H)$ sind , d.h. , wenn es ein $\beta \in \mathrm{Int}_K(H)$ gibt, so daß für alle $\gamma \in \Gamma$:

$$\tau'_\gamma = \beta^{-1} \circ \tau_\gamma \circ {}^\gamma\beta \ .$$

Sind τ und τ' inner kohomolog, so schreiben wir auch $\tau \approx \tau'$.

Sei $B := Z_{\mathrm{Aut}(G')}(S')$, also $B(K) = Z_{\mathrm{Aut}_K(G')}(S')$, dann haben wir einen kanonischen Homomorphismus

$$p : B(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(G'_0)$$

indem wir die Elemente von $B(K)$ auf G'_0 einschränken.
Die zentrale Isogenie zwischen $\widetilde{G}'_0$ und G'_0 induziert eine Injektion

$$i : \mathrm{Aut}_K(G'_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\widetilde{G}'_0) \ .$$

Wir bezeichnen $i \circ p = \Phi : B(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\widetilde{G}'_0)$
und die induzierte Abbildung mit :

$$\Phi_* : Z^1(k, B(K)) \longrightarrow Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(\widetilde{G}'_0))$$

Eine Antwort auf das in 2.1. betrachtete Problem gibt der

3.1.3. SATZ : ([32] , Proposition 4)
G existiert genau dann, wenn es ein $\tau \in Z^1(k, B(K))$ gibt, für das gilt :

i) $\Phi_*(\tau) \approx \tau'$

ii) τ ist verträglich mit der gegebenen Operation von Γ .

Zum Beweis benötigen wir ein

3.1.4. LEMMA : Sei H eine halbeinfache algebraische k-Gruppe mit Dynkin Diagramm $\mathcal{D}$ (zugrundeliegende Punktmenge: Δ) .
Seien H_1 und H_2 k-Formen von H mit K-Isomorphismen $f_1 : H \xrightarrow{\sim} H_1$ und $f_2 : H \xrightarrow{\sim} H_2$. Die entsprechenden Kozyklen in $Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(H))$ seien mit ξ_1 und ξ_2 bezeichnet. Weiter seien $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ die Dynkin Diagramme von H_1 und H_2 und $f_{i,\circ} : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_i$, i= 1 , 2 die zugehörigen Diagramm-Isomorphismen. Dann gilt :
Es existiert ein k-Isomorphismus $f : H_1 \xrightarrow{\sim} H_2$ mit Diagramm-Isomorphismus $f_\circ : \mathcal{D}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_2$, so daß $f_{2,\circ} = f_\circ \circ f_{1,\circ}$ genau dann, wenn $\xi_1 \approx \xi_2$.

Beweis : Es existiere ein k-Isomorphismus $f: H_1 \longrightarrow H_2$ mit $f_{2,\circ} = f_\circ \circ f_{1,\circ}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D} \arrow[ddll, "f_{1,\circ}"'] \arrow[ddrr, "f_{2,\circ}"] & & \\
 & & H \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \\
 & H_1 \arrow[rr, "f"'] & & H_2 & \\
\mathcal{D}_1 \arrow[rrrr, "f_\circ"'] & & & & \mathcal{D}_2
\end{tikzcd}$$

Sei $T \subset H$ ein maximaler K-Torus, dann ist $f_2^{-1} \circ f \circ f_1(T)$ ein K-Torus und damit in $H(K)$ zu T konjugiert.

Sei also $c \in \mathrm{Int}_K(H)$ mit $c \circ f_2^{-1} \circ f \circ f_1(T) = T$, und so daß c die entsprechenden Wurzelbasen ineinander überführt. Dann induziert nach Voraussetzung $\alpha = c \circ f_2^{-1} \circ f \circ f_1$ auf Δ die Identität, also gilt $\alpha \in N_H(T)$. Wir ersetzen c durch $\alpha^{-1} \circ c$ und erhalten $c \circ f_2^{-1} \circ f \circ f_1 = 1$. Daraus folgt für $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \xi_{2,\gamma} &= f_2^{-1} \circ {}^{\gamma}f_2 = c^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f^{-1} \circ {}^{\gamma}f \circ {}^{\gamma}f_1 \circ {}^{\gamma}c = c^{-1} \circ f_1^{-1} \circ {}^{\gamma}f_1 \circ {}^{\gamma}c \\ &= c^{-1} \circ \xi_{1,\gamma} \circ {}^{\gamma}c \qquad , \text{ da } f/k . \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $c \in \mathrm{Int}_K(H)$ mit $\xi_{1,\gamma} = c^{-1} \circ \xi_{2,\gamma} \circ {}^{\gamma}c$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Dann setzen wir $f = f_2 \circ c \circ f_1^{-1}$ und offensicntlicn ist f ein k-Isomorpnismus. Es induziert c die Identität auf $\mathcal{D}$ und f leistet das Verlangte.

Beweis von Satz 3.1.3. :

"$\Longleftarrow$"

1) Sei G_0 der halbeinfache anisotrope Kern von $G = {}_{\tau}G'$, dann zeigen wir : G_0 ist zentral isogen zu A.

Da $\tau \in Z^1(k, B(K))$ ist $X^*({}_{\tau}S')^{\Gamma} = X^*({}_{\tau}S')$, wie man leicht nachrechnet, also ist ${}_{\tau}S'$ k-zerfallend.

Da τ mit der gegebenen Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ verträglich ist, stimmt die $*$-Operation von ${}_{\tau}G'$ damit überein. Nach der Definition von S' ist dann aber klar, daß ${}_{\tau}S'$ maximal k-zerfallend in

${}_{\tau}G$ ist. Wir können also G_0 beschreiben als $D(Z({}_{\tau}S'))$ und die einfach zusammenhängende Überlagerung $\tilde{G}_0$ ist k-isomorph zu ${}_{\Phi_*(\tau)}\tilde{G}_0'$ also zu A.

2) Der Index von ${}_{\tau}G$ läßt sich wegen 1) und der Verträglichkeit von τ mit $\mathcal{J}$ identifizieren und nach Konstruktion von S' ist klar, daß die nicht ausgezeichneten Γ-Orbits in Δ gerade G_0 entsprechen.

3) Die Isogenie $A \longrightarrow G_0$ induziert die Injektion der Indizes $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}$.

Wir haben A identifiziert mit ${}_{\tau'}\tilde{G}_0'$ und erhalten damit das folgende kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
{}_{\tau'}\tilde{G}_0' \arrow[rr, "\alpha_1"] & & {}_{\Phi_*(\tau)}\tilde{G}_0' \arrow[rr, "\alpha_2"] & & {}_{p_*(\tau)}G_0' \arrow[rr, "\alpha_3"] & & ({}_{\tau}G')_0 \arrow[rr, "\alpha_4"] & & {}_{\tau}G' \\
 & \mathrm{I} & & \mathrm{II} & & \mathrm{III} & & \mathrm{IV} & \\
 & \tilde{G}_0' \arrow[uul, "\beta_1"] \arrow[uur, "\beta_2"'] \arrow[rrrr, "\delta_1"'] & & & & G_0' \arrow[uul, "\beta_3"] \arrow[uur, "\beta_4"'] \arrow[rrr, "\delta_2"'] & & & G' \arrow[uu, "\beta_5"']
\end{tikzcd}$$

Bezeichnen wir die induzierten Dynkin Diagramm Abbildungen mit $\alpha_{i\circ}$ und die Teildiagramme mit $\mathrm{I}_\circ - \mathrm{IV}_\circ$, so gilt die Kommutativität in $\mathrm{II}_\circ$, $\mathrm{III}_\circ$ und $\mathrm{IV}_\circ$ nach Definition und in $\mathrm{I}_\circ$ nach Lemma 3.1.4.

Ferner können wir β_1 so wählen, daß $\beta_{5\circ} \circ \delta_{2\circ} \circ \delta_{1\circ} \circ \beta_{1\circ}^{-1}$ die gegebene Injektion $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}$ ist.

Dann folgt aus der Kommutativität der Diagramme $\mathrm{I}_\circ - \mathrm{IV}_\circ$ aber sofort, daß die Isogenie zwischen ${}_{\tau'}\tilde{G}_0'$ und $G_0 = ({}_{\tau}G')_0$, also $\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ die gegebene Injektion der Indizes induziert.

"$\Longrightarrow$"

Wir nehmen an, daß die Gruppe G mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

Sei $S \subset G$ ein maximal k-zerfallender Torus, dann können wir wegen der Konjugationssätze über Tori einen K-Isomorphismus $f: G' \longrightarrow G$ so wählen, daß $f(S') = S$. Der durch f definierte Kozykel in $Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(G'))$ sei wieder mit τ bezeichnet so daß wir G mit ${}_{\tau}G'$ identifizieren können, Dann genügt τ den Bedingungen des Satzes :

1) $\tau \in Z^1(k, B(K))$, denn S und S' sind k-zerfallende Tori, also ist $f_{|S'}$ über k definiert, das bedeutet gerade, daß für $\gamma \in \Gamma$ $\tau_\gamma = f^{-1} \circ {}^{\gamma}f$ S' zentralisiert, also :

$$\tau_\gamma \in Z_{Aut_K(G')}(S') = B(K) .$$

2) Mit den Bedingungen von Lemma 3.1.4. folgt wie in "$\Longleftarrow$",3), daß τ' inner kohomolog zu $\phi_*(\tau)$ ist .

3) Für $\alpha \in \Delta$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt :

$$\begin{aligned} m_\gamma(\alpha) &= \gamma^*_\tau(\alpha) \quad , \text{($*$-Operation in } {}_\tau G') \\ &= w_\gamma(\, {}^{\gamma}\tau(\alpha)\,) \quad , (\gamma_\tau = \text{getwistete Op.}) \\ &= w_\gamma(\, {}^{\gamma}(\alpha \circ \tau_\gamma^{-1})\,) \\ &= w_\gamma(\, {}^{\gamma}(\overline{\tau_\gamma}(\alpha))\,) \\ &= \gamma^*(\overline{\tau_\gamma}(\alpha)) \\ &= \overline{\tau_\gamma}(\alpha) \quad , \text{da die $*$-Operation} \end{aligned}$$

in G' trivial ist. Also ist τ mit m verträglich, wenn m die vorgegebene Γ - Operation ist.

3.2. Die Bedingung im quasi-zerfallenden Fall

Es soll eine analoge Bedingung wie in 3.1. an den Kozykel τ^q gestellt werden. Da $\tau^q_\gamma \in \overline{G^q_0}(K)$, wird hier eine Bedingung über innere Kohomologie entfallen und ebenso werden wir nach den Voraussetzungen über G^q keine Verträglichkeitsbedingungen stellen müssen. Wir ersetzen B durch $B^q = Z_{G^q}(S^q)$ und erhalten wie früher einen kanonischen Homomorphismus :

$$p : B^q(K) \longrightarrow \overline{G^q_0}(K) \quad , \text{der die Abbildung}$$

$$p_* : H^1(k, B^q(K)) \longrightarrow H^1(k, \overline{G^q_0}(K))$$

induziert. Die zu 3.1.3. analoge Behauptung lautet dann :

3.2.1. SATZ : ([32], Prop. 4, (ii))

G existiert $\Longleftrightarrow [\tau^q] \in \text{Bild}(p_*)$

Beweis :

"$\Longrightarrow$"

Es existiere eine Gruppe G mit den gewünschten Eigenschaften . Dann gibt es einen über K definierten Isomorphismus $\varphi : G^q \xrightarrow{\sim} G$, der einen Kozykel $\tau = (\varphi^{-1} \circ {}^{\gamma}\varphi)_{\gamma \in \Gamma}$ in $Z^1(k, Aut_K(G^q))$ definiert. Da G und G^q dieselbe $*$ - Operation besitzen, sind sie innere Formen voneinander (cf. II, 2.3.6.) , also liegt τ im Bild von

$$Z^1(k, \overline{G^q}) \longrightarrow Z^1(k, Aut_K(G^q))$$

Andererseits können wir φ so wählen, daß $\varphi(S^q) = S$ ein beliebiger maximal k-zerfallender Torus von G ist. Daraus folgt sofort :

$$\varphi(G^q_0) = \varphi(D(Z(S^q))) = D(Z(S)) = G_0$$

und da nach Voraussetzung G_0 zentral isogen zu A ist, erhält man unmittelbar : $[\tau^q] \in \text{Bild}(p_*)$.

"$\Longleftarrow$"

Sei umgekehrt $[\tau^q] \in \text{Bild}(p_*)$. Wir wählen einen Kozykel $\tau \in Z^1(k, B^q(K))$ mit $p_*([\tau]) = [\tau^q]$ und twisten G^q mit τ . Dann erfüllt $G = {}_{\tau}G^q$ die Bedingungen des Satzes :

1) Aus der Eindeutigkeit der einfach zusammenhängenden Überlagerung folgt, daß G_0 zentral isogen zu A ist.

2) Da ${}_{\tau}G^q$ eine innere Form von G^q ist, hat sie dieselbe $*$ - Operation . Zusammen mit 1) ergibt sich daraus sofort, daß man den Index von G mit $\mathcal{J}$ identifizieren kann.

3) Die Bedingungen über innere Kohomologie sind trivialerweise erfüllt, also überträgt sich der Beweis von 3.1.3. auch darauf, daß die Isogenie $A \longrightarrow G_0$ die gegebene Injektion der Indizes induziert.

§ 4 Der " innere Fall " ([32] , 3.4.5.)

Wir betrachten den Fall einer trivialen Γ - Operation auf $\mathcal{D}$.

4.1. LEMMA : Sei H eine zusammenhängende reduktive k-Gruppe, $T \subset H$ ein maximaler k-Torus, $\mathrm{Int}_H : H \longrightarrow \mathrm{Int}(H) \subset \mathrm{Aut}(H)$ die kanonische Abbildung in die inneren Automorphismen von H , dann gilt :

$$\mathrm{Int}_H(H)(K) \subset \mathrm{Int}_H(H(K)) \,.\, \mathrm{Int}_H(T)$$

Beweis: Da T über k definiert ist, zerfällt er über K , nimmt man also ein $\alpha \in \mathrm{Int}_H(H)(K)$, dann ist $\alpha(T)$ auch K-zerfallend, also gibt es ein $g_1 \in H(K)$ mit $\mathrm{Int}_H(g_1)(\alpha(T)) = T$. Dann gibt es aber ein $g_2 \in H(K)$ mit :

$$\mathrm{Int}_H(g_2) \circ \mathrm{Int}_H(g_1) \circ \alpha_T = \mathrm{Int}_H(g_2 g_1) \circ \alpha_T = \mathrm{id}_T$$

([7] , 2.11.). Also ist $\mathrm{Int}_H(g_2 g_1) \circ \alpha \in Z(T) = \mathrm{Int}_H(T)$.

4.2. LEMMA : Sei H eine halbeinfache k-Gruppe, $T \subset H$ ein maximaler k-Torus und $S \subset T$ ein k-Untertorus. Sei $L := Z_H(S)$, dann gilt :

$$L(K) = T(K) \,.\, D(L)(K)$$

Beweis :

1) Die Zerlegung gilt über $\bar{k}$: $L(\bar{k}) = T(\bar{k}).D(L)(\bar{k})$.
Ist $g \in L(\bar{k})$, so gibt es also $g_0 \in D(L)(\bar{k})$ und $t \in T(\bar{k})$ mit $g = t.g_0$. Da $T(\bar{k}) = S(\bar{k}).(T \cap D(L))(\bar{k})$ können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $t \in S(\bar{k})$. Nun ist aber $S = \mathrm{Zentrum}(L)$, also gilt :

$$\mathrm{Int}(g)|_{D(L)(\bar{k})} = \mathrm{Int}(g_0)$$

also ist $\mathrm{Int}(g)|_{D(L)(\bar{k})}$ ein innerer Automorphismus von $D(L)$.

2) Sei nun $g \in L(K)$, dann gilt wegen 1) :

$$\mathrm{Int}(g)|_{D(L)} \in \mathrm{Int}(D(L))(K)$$

, also wegen Lemma 4.1. :

$$\mathrm{Int}(g)|_{D(L)} \in \mathrm{Int}(D(L)(K)).\mathrm{Int}(T) \,.$$

Das liefert uns aber ein $g_1 \in D(L)(K)$, so daß gilt :

$$\mathrm{Int}(gg_1)|_T = \mathrm{Id}_T \,.$$

Also : $gg_1 \in L(K) \cap Z(T) = L(K) \cap T = T(K)$, womit wir erhalten : $g \in D(L)(K) \,.\, T(K)$, also $L(K) \subset D(L)(K) \,.\, T(K)$. Da die andere Inklusion klar ist, sind wir fertig.

4.3. SATZ : ([32] , Proposition 6)
Die Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ sei trivial. Sei
Sei $\pi_* : H^1(k, G_0^s(K)) \longrightarrow H^1(k, \overline{G_0^s}(K))$ die von der Isogenie $\pi : G_0^s \longrightarrow \overline{G_0^s}$ induzierte Abbildung, dann gilt :

$$G \text{ existiert} \Longleftrightarrow [\tau^s] \in \mathrm{Bild}(\pi_*)$$

Beweis :

1) Wir betrachten die Sequenz :

$$1 \longrightarrow G_0^s(K) \longrightarrow Z(S^s)(K) \longrightarrow S_1(K) \longrightarrow 1$$

Wir wollen eine algebraische Gruppe S_1 definieren, so daß die obige Sequenz exakt wird und außerdem $H^1(k, S_1(K)) = \{1\}$. Die Zerlegung $Z(S^s) = S^s . G_0^s$ legt nahe, $S_1 = S^s / S^s \cap G_0^s$ zu definieren.

2) S_1 ist ein k-zerfallender Torus .
Wir betrachten den Morphismus $\pi_1 : Z(S^s) \longrightarrow Z(S^s)/S^s \cap G_0^s$. Da S^s ein Torus ist, ist $\pi_1(S^s)$ diagonalisierbar und abgeschlossen in $\pi_1(T^s)$, also selbst ein Torus , da $\pi_1(T^s)$ ein Torus ist. Da $S^s \cap G_0^s$ über k definiert ist , ist es auch π_1 , also ist S_1 als Bild eines k-zerfallenden Torus unter einem k-Morphismus k-zerfallend.

3) Nach Lemma 4.2. gilt : $Z(S^s)(K) = T^s(K) \,.\, G_0^s(K)$.
Betrachten wir die exakte Sequenz :

$$1 \longrightarrow G_0^s(K) \longrightarrow Z(S^s)(K) \longrightarrow S_1(K) \longrightarrow 1$$

dann gilt :

$$S_1(K) \simeq Z(S^s)(K) / G_0^s(K) \simeq (T^s(K) \,.\, G_0^s(K)) / G_0^s(K)$$

$$\cong T^s(K)/T^s(K) \cap G_0^s(K)$$

$$\cong T^s(K)/(T^s \cap G_0^s)(K) \quad .$$

Nun sind aber T^s und $T^s \cap G_0^s$ Tori, also gilt nach Lemma I, 4.1.1. :

$$T^s(K)/(T^s \cap G_0^s)(K) \cong T^s/T^s \cap G_0^s \ (K)$$

$$\cong S^s/S^s \cap G_0^s \ (K)$$

$$= S_1(K) \quad .$$

Wir haben also eine exakte Sequenz :

$$1 \longrightarrow G_0^s(K) \xrightarrow{\ i\ } Z(S^s)(K) \longrightarrow S_1(K) \longrightarrow 1$$

mit k-zerfallendem Torus S_1 , also liefert die exakte Kohomologie-sequenz :

$$H^1(k, G_0^s(K)) \longrightarrow H^1(k, Z(S^s)(K)) \longrightarrow 1 \quad .$$

Also ist i_* surjektiv und da in dem vorliegenden Fall $T^s = T^q$ gilt, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 3.2.1. .

§ 5 Darstellungstheorie

Ich möchte mich hier auf die Darstellungstheorie halbeinfacher Gruppen beschränken, was nach den Sätzen des zugrundegelegten Artikels [36] keine wesentliche Einschränkung gegenüber reduktiven Gruppen ist.

5.1. Bezeichnungen

Außer den Konventionen von II, 2.1. benutzen wir die folgenden Bezeichnungen : $X^*(T) = \Lambda$, $\bar{\Lambda}$ das von den Wurzeln erzeugte Untergitter in Λ , $\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda \mid$ für alle $w \in W : \lambda - w(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha \ , n_\alpha \geq 0\}$

und $C^* := \Lambda/\bar{\Lambda}$. Γ operiere stets mit der $*$ - Operation auf Λ , $\bar{\Lambda}$ und C^* .

D -Darstellungen ([36] , I , 1.)

Sei D eine k-Algebra , X ein D-Modul, dann ist die algebraische k-Gruppe ${}_k Gl_{X,D}$ definiert durch :

$${}_k Gl_{X,D}(A) := \mathrm{Aut}_{D \otimes_k A}(X \otimes_k A) \quad \text{für alle k-Algebren } A .$$

Eine " D - Darstellung " von G ist ein k-Morphismus $\rho : G \longrightarrow {}_k Gl_{X,D}$.

Zwei D - Darstellungen $\rho : G \longrightarrow {}_k Gl_{X,D}$ und $\rho' : G \longrightarrow {}_k Gl_{X',D}$ heißen " D - äquivalent " , wenn es einen D - Modul Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\ \sim\ } X'$ gibt, so daß für den induzierten Isomorphismus $\varphi_* : {}_k Gl_{X,D} \xrightarrow{\ \sim\ } {}_k Gl_{X',D}$ gilt: $\rho' = \varphi_* \circ \rho$.

Eine D - Darstellung heißt " absolut irreduzibel " , wenn sie über $\bar{k}$ äquivalent zu einer irreduziblen $\bar{k}$ - Darstellung ist.

Für $D = k$ und $X = k^n$ findet man also die gewöhnlichen k - Darstellungen wieder und wir schreiben Gl_n für ${}_k Gl_{k^n,k}$.

5.2. Der β - Homomorphismus ([36] , 3.)

5.2.1. SATZ : ([36] , Théorème 3.3.)

Sei $\lambda \in \Lambda_+^\Gamma$, dann existiert eine zentrale Divisionsalgebra D über k , ein D - Modul X und eine D - Darstellung $\rho : G \longrightarrow {}_k Gl_{X,D}$, so daß über K ρ_K eine irreduzible Darstellung zum höchsten Gewicht λ ist. Die Algebra D ist eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt . Zu gegebenem D ist die Darstellung ρ bis auf D - Äquivalenz eindeutig. Die dadurch definierte Abbildung von Λ_+^Γ in Br Br(k) sei mit $\alpha_{G,k}$ bezeichnet . Es gilt :

$$\lambda \in \bar{\Lambda}_+ \Rightarrow \alpha_{G,k}(\lambda) = 1 \quad \text{und} \quad G = \text{k-quasi-zerf.} \Rightarrow \alpha_{G,k} = 1.$$

5.2.2. SATZ : ([36] , Corollaire 3.5.)

Sei $\alpha_{G,k}$ die Abbildung aus Satz 5.2.1. , dann gilt:

(i) $\alpha_{G,k}(\lambda_1+\lambda_2) = \alpha_{G,k}(\lambda_1) + \alpha_{G,k}(\lambda_2)$, $\lambda_1 , \lambda_2 \in \Lambda_+^\Gamma$

(ii) Bezeichnen wir die induzierte Abbildung von Λ^Γ in Br(k) auch mit $\alpha_{G,k}$, so gilt :

$\alpha_{G,k}(\lambda) = [\,D\,] \iff$ es existiert eine D - Darstellung von G , für die λ über K einfaches Gewicht ist.

(iii) $\alpha_{G,k}$ faktorisiert durch einen Homomorphismus

$$\beta_{G,k} : C^{*\Gamma} = \Lambda^\Gamma / \bar{\Lambda}^\Gamma \longrightarrow Br(k) .$$

5.2.3. Kohomologische Definition von β ([36] , § 4)

Die Definition soll hier nur in dem Spezialfall eines perfekten Grundkörpers k gegeben werden, für den allgemeinen Fall sei auf [36] verwiesen.

Sei G^q die k-quasi-zerfallende Form von G mit derselben Diskriminante ; sei $c \in C^{*\Gamma}$ und $\lambda \in \Lambda_+^\Gamma$ ein Repräsentant von c , $\rho : G^q \longrightarrow Gl_n$ eine absolut irreduzible Darstellung mit dominantem Gewicht λ .

Da C^* in Dualität zu $Z(G^q)$ steht, definiert $c \in C^{*\Gamma}$ einen Homomorphismus $\tilde{c} : Z(G^q) \longrightarrow {}_k\mathrm{Mult}$.

Man erhält also das folgende kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z(G^q)(\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{c}"] & G^q(\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \bar{G}^q(\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[r] & Gl_n(\bar{k}) \arrow[r] & PGl_n(\bar{k}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ergibt sich daraus das folgende

Diagramm für die Kohomologie :

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, \bar{G}^q) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^2(k, Z(G^q)) \arrow[d, "\tilde{c}_*"] & \\
H^1(k, PGl_n(\bar{k})) \arrow[r] & H^2(k, \bar{k}^*) \arrow[r, "\sim"] & Br(k)
\end{tikzcd}$$

Ist nun G durch den Kozykel $\xi \in Z^1(k, \bar{G}^q)$ definiert, so gilt :

$$\beta_{G,k}(c) = \tilde{c}_*(\delta([\xi]))$$

(Mehr Details dazu findet man in [36] im Beweis von Théorème 3.3. und in § 4.)

5.3. Die Brauer -Invariante

5.3.1. DEFINITION : Der Homomorphismus $\beta_{G,k} : C^{*\Gamma} \longrightarrow Br(k)$ aus Satz 5.2.2. heißt die " Brauer - Invariante " von G . Manchmal bezeichnen wir auch $\alpha_{G,k} : \Lambda^\Gamma \longrightarrow Br(k)$ als Brauer - Invariante.

5.3.2. In der Literatur gibt es zahlreiche Definitionen dieser Invarianten und ich möchte zu den wichtigsten dieser Definitionen einige Bemerkungen machen.

Wir haben in 5.2. $H^2(k, K^*)$ mit Br(k) identifiziert ; nun gibt es zwei Isomorphismen zwischen Br(k) und $H^2(k, K^*)$ und der hier benutzte soll kurz erläutert werden ([28] , Chap. X , § 5) .

Sei A eine zentral einfache Algebra über k , dann zerfällt A über K , d. h. es gibt einen K-Isomorphismus

$$f : M_n(K) \xrightarrow{\sim} A \otimes_k K$$

und A definiert damit einen Kozykel $(f^{-1} \circ {}^\gamma f)_{\gamma \in \Gamma} \in Z^1(k, PGl_n(K))$.

Nach dem Satz von Skolem -Noether ist $f^{-1} \circ {}^\gamma f$ ein innerer Automorphismus, also $f^{-1} \circ {}^\gamma f = \mathrm{Int}(p_\gamma)$ und $p_{\gamma'} {}^{\gamma'}p_{\gamma} p_{\gamma\gamma'}^{-1} = a_{\gamma,\gamma'} \in K^*$

ist ein 2-Kozykel. Die Klasse von $(a_{\gamma,\gamma'})$ in $H^2(k,K^*)$ ist dann das Bild der Klasse $[A] \in Br(k)$ in $H^2(k,K^*)$.

Bemerkung: Mit der Methode der verschränkten Produkte (siehe [2], Chap. VIII, No. 4, oder [1]), findet man die inverse Klasse in $H^2(k,K^*)$ (siehe [28], Chap. X, § 5, Ex. 1 und 2).

Bei der kohomologischen Definition von β haben wir einfach vorausgesetzt, daß G durch " $\xi \in Z^1(k,\overline{G^q})$ definiert wird ". Die Voraussetzung, daß G dieselbe Diskriminante wie G^q besitzt, besagt zwar gerade, daß die zu G gehörende Klasse $[\eta]$ aus $H^1(k, Aut_K(G^q))$ im Bild von $H^1(k,\overline{G^q})$ liegt, das Liften ist aber nur eindeutig bis auf Transformation durch Elemente von $A^q(k) = Autext(G^q)(k)$.

Betrachten wir die Überlagerungssequenz:

$$1 \longrightarrow Z(\tilde{G}^q) \longrightarrow \tilde{G}^q \longrightarrow \overline{G^q} \longrightarrow 1$$

so ist $\delta([\xi]) \in H^2(k, Z(\tilde{G}^q))$ auch nur bis auf Transformation durch Elemente von $A^q(k)$ bestimmt.

Harder definiert nun den $A^q(k)$ - Orbit von $\delta([\xi])$ in $H^2(k, Z(\tilde{G}^q))$ als Brauer - Witt Invariante (siehe [19]); eine entsprechende Definition findet man bei Satake ([26]).

Wir sehen also, daß die Definition von β auch nur bis auf die Operation der äußeren Automorphismen auf den Gewichten, also auf C^* gegeben ist.

Betrachtet man etwa eine Gruppe vom Typ ^1A_n : $G = Sl_{r+1}(D)$ mit $Dim_k(D) = d^2$, $d.(r+1) = n+1$

I—I....I-(I)-I....I-(I)-I..........I-(I)-I....I-(I)-I....I—I

α_1 α_2 α_n

Sei das Fundamentalgewicht zu α_i mit ω_i und das Bild in C^* mit $\overline{\omega_i}$, dann gilt: $\beta_{G,k}(\overline{\omega_1}) = [D]$ und $\beta_{G,k}(\overline{\omega_n}) = [D^n] = [D^\circ]$. Da die Wahl von α_1 bzw. α_n aber willkürlich ist, was der Operation der äußeren Automorphismen entspricht, erhalten wir je nach Identifizierung D oder D°.

Die Brauer-Invariante stellt eine Verallgemeinerung der Hasse-Invarianten zentral einfacher Algebren dar. Näheres darüber findet man bei Satake ([26]).

5.3.3. Hasse - Invariante quadratischer Formen

Wir betrachten gewöhnliche nicht-entartete quadratische Formen über einem k-Vektorraum V ($Char.(k) \neq 2$). Wir benutzen die Terminologie von [33] und definieren:

$$d(q) := (-1)^{\binom{m}{2}} \cdot det(q), \quad \text{wobei } m = Dim(V)$$

Dann ist $d(q)$ bis auf Multiplikation mit Elementen von k^{*2} bestimmt, wir bezeichnen das Bild von $d(q)$ in k^*/k^{*2} als Diskriminante von q und schreiben:

$$Diskr(q) = d(q) \mod(k^{*2})$$

(N.b.: Diese Definition stimmt nicht mit [10] überein!)

Typ B_n:

Sei q eine nicht - entartete quadratische Form über k in $2n+1$ Variablen. Dann ist die gerade Clifford - Algebra $Cl^+(q)$ zentral einfach und zerfällt genau dann, wenn q maximalen Index n hat ([10], § 9, N° 4, Th. 3). Das Bild von $Cl^+(q)$ in der Brauergruppe $[Cl^+(q)]$ heißt die Hasse - Invariante von q.

Typ D_n:

Ist q eine nicht - entartete quadratische Form über k in $2n$ Variablen, so zerfällt $Cl^+(q)$ in ein direktes Produkt zweier einfacher Algebren, genau dann, wenn $Diskr(q) = 1$ ([33], Cor. 3):

$$Cl^+(q) = Cl_1^+(q) \times Cl_2^+(q)$$

und die Bilder von $Cl_1^+(q)$ und $Cl_2^+(q)$ in $Br(k)$ heißen die Hasse - Invarianten von q.

Ist $Diskr(q) \neq 1$, so ist $Cl^+(q)$ eine zentral einfache Algebra über einer quadratischen Erweiterung von k ([33], Cor. 2).

Falls $Char(k) = 2$, muß man " quadratische Formen in Algebren mit Involution " im Sinne von [33] betrachten.

Daß $\beta_{G,k}$ die Hasse-Invariante als Spezialfall enthält, sieht man aus der folgenden Diskussion der Brauer-Invarianten der klassischen Gruppen.

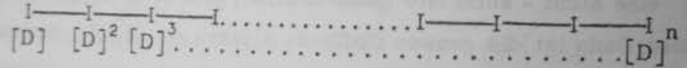
5.4. Die Brauer-Invarianten der fast-einfachen Gruppen

Sei G eine einfach zusammenhängende Gruppe des betrachteten Typs. Das Fundamentalgewicht zu $\alpha_i \in \Delta$ bezeichnen wir wieder mit ω_i und das Bild in C^* mit $\overline{\omega_i}$.

5.4.1. ${}^1A_n$

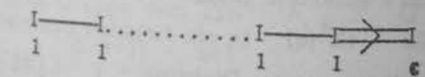
Wir haben $G = Sl_{r+1}(D)$ mit zentraler Divisionsalgebra D, $\mathrm{Dim}_k(D) = d^2$ und $d(r+1) = n+1$.
Es ist $\beta_{G,k}(\overline{\omega_1}) = [D]$, $\overline{\omega_1}$ hat Ordnung $n+1$ und es ist $\overline{\omega_i} = i.\overline{\omega_1}$. Also gilt: $\beta_{G,k}(\overline{\omega_i}) = [D]^i$.

Insbesondere zerfällt G genau dann, wenn die Brauer-Invariante trivial ist.



5.4.2. B_n

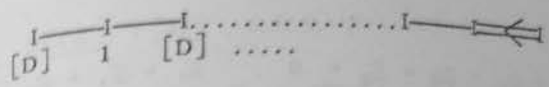
Es ist $\overline{\omega_i} = 0$ für $i < n$ und $2\overline{\omega_n} = 0$, $G = SO_{2n+1}(q)$ mit quadratischer Form q und $\beta(\overline{\omega_n})$ ist die Hasse-Invariante von q, also mit $\varepsilon = [Cl^+(q)]$:



5.4.3. C_n

Hier ist $\overline{\omega}_{2i} = 0$, $\overline{\omega}_{2i+1} = \overline{\omega_1}$ und $2\overline{\omega_1} = 0$, $G = SU_{2n/d}(D,h)$, und $\beta_{G,k}(\overline{\omega_1}) = [D]$.

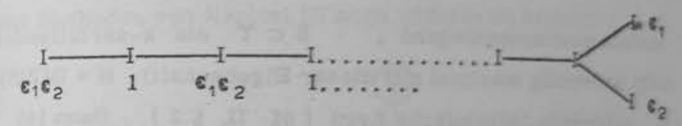
Nun sind alle symplektischen Formen gleicher Dimension äquivalent, also haben wir auch hier: G zerfällt genau dann, wenn β trivial ist.



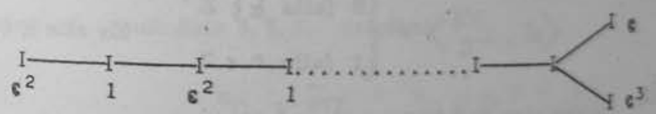
5.4.4. ${}^1D_n$

G ist einfach zusammenhängende Überlagerung von $SO_{2n/d}(D,q)$ mit verallgemeinerter quadratischer Form q, $\mathrm{Diskr}(q) = 1$ (s. [33]).
Es ist $\overline{\omega}_{2i} = 0$ für $2i < n-1$, $\overline{\omega}_{2i+1} = \overline{\omega_1}$ für $2i+1 < n-1$ und $2\overline{\omega_1} = 0$.

Ist n gerade, so ist $2\overline{\omega}_n = 2\overline{\omega}_{n-1} = 0$ und $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_n + \overline{\omega}_{n-1}$. Die gerade Clifford-Algebra ist ein direktes Produkt zweier einfacher Algebren:
$Cl^+(q) = Cl_1^+(q) \times Cl_2^+(q)$ und mit $\varepsilon_i = [Cl_i^+(q)]$ ist:
$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ und $\varepsilon_1.\varepsilon_2 = [D]$.



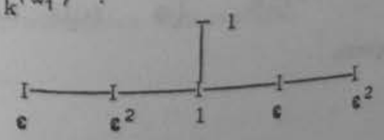
Ist n ungerade, so ist $4\overline{\omega}_n = 0$, $3\overline{\omega}_n = \overline{\omega}_{n-1}$, $2\overline{\omega}_n = \overline{\omega}_1$,
$Cl^+(q) = Cl_1^+(q) \times Cl_2^+(q)$ und mit $\varepsilon = [Cl_1^+(q)]$ ist $[Cl_2^+(q)] = \varepsilon^{-1}$,
$\varepsilon^2 = [D]$, $\varepsilon^4 = 1$.



In jedem Fall ist also $\beta_{G,k}(\overline{\omega_1}) = [D]$ und $\beta_{G,k}(\overline{\omega}_n)$ und $\beta_{G,k}(\overline{\omega}_{n-1})$ sind die Hasse-Invarianten von q.
Außerdem sehen wir, daß q genau dann eine gewöhnliche quadratische Form ist, wenn $\beta_{G,k}(\overline{\omega_1}) = 1$ ist und in diesem Fall ist $\beta_{G,k}(\overline{\omega}_n) = \beta_{G,k}(\overline{\omega}_{n-1})$ die Hasse-Invariante von q.

5.4.5. ${}^1E_6$

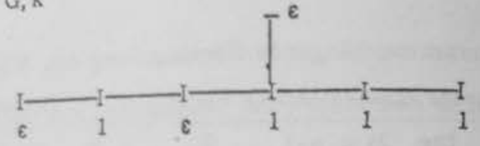
Es ist $3\overline{\omega_1} = \overline{\omega_3} = \overline{\omega_6} = 0$, $\overline{\omega_1} = \overline{\omega_4}$, $2\overline{\omega_1} = \overline{\omega_2} = \overline{\omega_5}$, also ist mit $\varepsilon = \beta_{G,k}(\overline{\omega_1})$:



5.4.6. E_7

Hier ist $2\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_4 = \overline{\omega}_5 = \overline{\omega}_6 = 0$, $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_7$,

also mit $\beta_{G,k}(\overline{\omega}_1) = \varepsilon$:



5.4.7.

Bei E_8 , F_4 und G_2 ist der Zusammenhangsindex 1 , also ist nach Satz 5.2.2. β immer trivial .

5.5. Der Zusammenhang mit den Brauer - Invarianten der Kerne

Sei G einfach zusammenhängend , $S \subset T$ ein k-zerfallender Torus (nicht notwendig maximal mit dieser Eigenschaft) $H = D(Z(S))$ der zu S gehörende halbeinfache Kern (cf. II, § 2) . Dann ist $\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha_{|S} = 0\}$ eine Basis für das Wurzelsystem Σ_0 von $T \cap H$ in H .

Sei $Z \subset \Delta$ ein Γ - Orbit, dann definieren wir $\lambda_Z^{(G)}$ durch :

$$\langle \check{\alpha}, \lambda_Z^{(G)} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \notin Z \\ 1 & \text{falls } \alpha \in Z \end{cases} \qquad \text{für alle } \alpha \in \Delta$$

Die $\lambda_Z^{(G)}$ bilden eine Basis von Λ^{Γ} .

Ist $Z \subset \Delta_0$ ein Γ - Orbit , so wird $\lambda_Z^{(H)} \in X^*(T \cap H)$ definiert durch :

$$\langle \check{\alpha}, \lambda_Z^{(H)} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \notin Z \\ 1 & \text{falls } \alpha \in Z \end{cases} \qquad \text{für alle } \alpha \in \Delta_0 .$$

Schreibt man $\lambda_Z^{(G)}|_{T \cap H} = \sum_{\alpha \in \Delta_0} \langle \check{\alpha}, \lambda_Z^{(G)} \rangle . \widetilde{\omega}_\alpha$, wobei $\widetilde{\omega}_\alpha$ das Fundamentalgewicht zu α in Σ_0 ist, so ergibt sich sofort :

$$\lambda_Z^{(G)}|_{T \cap H} = \begin{cases} \lambda_Z^{(H)} & \text{falls } Z \subset \Delta_0 \\ 0 & \text{falls } Z \subset \Delta \setminus \Delta_0 \end{cases}$$

Dann gilt der folgende

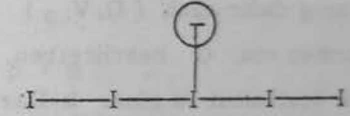
5.5.1. SATZ : ([36] , 5.5.5.)

$$\alpha_{G,k}(\lambda_Z^{(G)}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Z \subset \Delta \setminus \Delta_0 \\ \alpha_{H,k}(\lambda_Z^{(H)}) & \text{falls } Z \subset \Delta_0 \end{cases}$$

5.5.2. Bemerkung : In [36] , 5.5.5. ist der vorliegende Satz nur für den anisotropen Kern , also für den Fall eines maximal k-zerfallenden Torus S formuliert. Die Voraussetzungen für die zum Beweis benutzte Proposition 5.5.2. aus [36] sind aber via [36] , 5.5.3. a) und b) auch für den etwas allgemeineren hier betrachteten Fall erfüllt, ebenso wie die Voraussetzungen für 5.5.5. .

Mit diesem Satz lassen sich nun die vier Indizes ausschließen, die sich den Methoden von Kapitel III noch widersetzt hatten :

5.5.3.

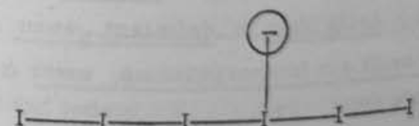


Der anisotrope Kern G_0 ist vom Typ ${}^1A_5$, d.h. $G_0 = Sl_{1,D}$ mit $\mathrm{Grad}(D) = \sqrt{\mathrm{Dim}_k(D)} = 6$ und Ordnung von $[D]$ in $\mathrm{Br}(k)$ gleich 6 . Nach Satz 5.5.1. ist dann :

$$\alpha_{G_0,k}(\widetilde{\omega}_1) = \alpha_{G,k}(\omega_1) = [D]$$

Da aber $\alpha_{G,k}$ nach Satz 5.2.2. iii) durch $C^*(G)$ faktorisiert und die Ordnung von $C^*(G)$ 3 ist, ergibt sich ein Widerspruch.

5.5.4.



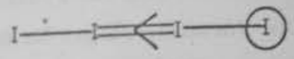
Hier ist $G_0 = Sl_{1,D}$, $\mathrm{Grad}(D) = 7$ und $\mathrm{Ordnung}([D]) = 7$.

Da aber $C^*(G)$ hier Ordnung 2 hat, erhält man wie oben durch Satz 5.2.2. den gewünschten Widerspruch.

5.5.5.

Es ist $G_0 = Sl_{1,D}$ mit $\mathrm{Grad}(D) = 2$, Ordnung($[D]$) = 2 , so daß der Widerspruch wie oben aus Ordnung($C^*(G)$) = 1 folgt.

5.5.6.



Der anisotrope Kern ist vom Typ C_3 und hat Brauer-Invariante 1, also zerfällt er nach 5.4.3. . Dann muß aber schon G zerfallen.

5.6. Twisten von Darstellungen ([35])

Sei $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ eine lineare Darstellung von G , dann schreiben wir zur Abkürzung dafür auch (G, V, ρ) .
Wir wollen nun die k-Formen von G beschreiben, für die eine gegebene k-Darstellung ρ wieder äquivalent zu einer k-Darstellung wird.
Dazu betrachten wir die Automorphismengruppe des " Objektes " (G, V, ρ) , um das Problem in Analogie zum Formenproblem algebraischer Gruppen beantworten zu können.

5.6.1. DEFINITION : Seien (G_1, V_1, ρ_1) und (G_2, V_2, ρ_2) lineare Darstellungen. Ein Morphismus von (G_1, V_1, ρ_1) nach (G_2, V_2, ρ_2) ist ein Paar (α, σ) , so daß $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ und $\sigma : V_1 \longrightarrow V_2$ Morpnismen in den entsprecnenden Kategorien sind mit : $\rho_2(\alpha(g)) \circ \sigma = \sigma \circ \rho_1(g)$ für alle $g \in G_1$. Ein Morphismus (α, σ) heißt über k definiert, wenn α und σ über k definiert sind, er neißt ein Isomorphismus, wenn α und σ Isomorphismen sind.

Sei (G, V, ρ) über k definiert. Dann operiert Γ auf $\mathrm{Aut}_K(G, V, \rho)$ durch :

$$^{\gamma}(\varphi, \psi) = ({}^{\gamma}\varphi, {}^{\gamma}\psi) \quad \text{für } \gamma \in \Gamma \text{ und } (\varphi, \psi) \in \mathrm{Aut}_K(G, V, \rho) .$$

Damit können wir $Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(G, V, \rho))$ bilden und (G, V, ρ) twisten.
Sei $\tau = \{\tau_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = \{(\varphi, \psi)^{-1} \circ {}^{\gamma}(\varphi, \psi)\}_{\gamma \in \Gamma} = \{(\alpha_\gamma, \sigma_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ aus $Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(G, V, \rho))$, dann definieren wir :

$$_{\tau}(G, V, \rho) := ({}_{\alpha}G, {}_{\sigma}V, {}_{\tau}\rho)$$

wobei $_{\tau}\rho$ durch das folgende Diagramm erklärt ist :

(5.6.2.)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"] & Gl(V) \arrow[d, "\psi_*"] \\ {}_{\alpha}G \arrow[r, dashed, "{}_{\tau}\rho"'] & Gl({}_{\sigma}V) \end{tikzcd}$$

also : $_{\tau}\rho = \psi_* \circ \rho \circ \varphi^{-1}$.

Damit rechnet man nun leicht aus, daß auch die getwistete Darstellung $_{\tau}\rho$ über k definiert ist.

Wir wollen den Fall $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$ mit irreduziblen inäquivalenten linearen Darstellungen ρ_i etwas näher betrachten und $\mathrm{Aut}(G, V, \rho)$ untersuchen.
Zunächst kann man G in $\mathrm{Aut}(G, V, \rho)$ einbetten :

(5.6.3.)
$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G, V, \rho) \\ g &\longmapsto (\mathrm{Int}(g), \rho(g)) \end{aligned}$$

Außerdem kann auf jedem V_i , $i \in I$ noch eine Homothetie operieren, also operiert ein Torus S der Dimension $\#(I)$ auf (G, V, ρ) .
Schließlich operieren noch äußere Automorphismen, die die ρ_i permutieren. Sei $\bar{\alpha} \in \mathrm{Autext}(G)$, so daß gilt:

$$\rho_i \circ \alpha = \rho_{i'} = \rho_{\alpha(i)} \quad , i \in I$$

so ist $(\alpha, \sigma) \in \mathrm{Aut}(G, V, \rho)$ für passendes $\sigma : V_i \longrightarrow V_{\alpha(i)}$.

Die Untergruppe der $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Autext}(G)$, die die ρ_i permutieren, bezeichnen wir mit A_ρ. Dann erhalten wir eine Zerlegung von

$\mathrm{Aut}_K(G, V, \rho) \simeq G(K).S(K).A_\rho(K)$. Es ist $G(K).A_\rho(K)$ semidirekt, und falls ρ treu, ist $S \cap G = Z(G)$. (vergl. auch [35], Prop. 1)

5.6.4. Γ-Äquivalenz von Darstellungen

Sei $\{ (G, V_i, \rho_i) \mid i \in I \}$ eine endliche Menge irreduzibler inäquivalenter Darstellungen und es sei eine Operation von Γ auf I gegeben.

5.6.5. DEFINITION : Eine k-Darstellung (G, V, ρ) heißt Γ-äquivalent zu $(G, \bigoplus_{i \in I} V_i, \bigoplus_{i \in I} \rho_i)$, wenn es einen K-Isomorphismus

$$(1, \psi) : (G, \bigoplus_{i \in I} V_i, \bigoplus_{i \in I} \rho_i) \xrightarrow{\;\sim\;} (G, V, \rho)$$

gibt, so daß für alle $\gamma \in \Gamma$ und $i \in I$ gilt :

$$\gamma(\psi(V_i)) = \psi(V_{\gamma(i)}) .$$

5.6.6. Bemerkung :

Operiert Γ trivial, so wird für alle $i \in I$

$$\rho_i = \psi\big|_{V_i}^{-1} \circ (\,_{\psi(V_i)}|\rho) \circ \psi\big|_{V_i}$$

also äquivalent zu einer k-Darstellung.

§ 6 Die darstellungstheoretische Bedingung

Wir kehren zu der Problemstellung in § 2 zurück: die kohomologischen Bedingungen der §§ 3 und 4 sollen mit Hilfe der Darstellungstheorie interpretiert werden. Zunächst vereinbaren wir noch einige Bezeichnungen. Wir wählen einen festen K-Isomorphismus $\phi : A \xrightarrow{\;\sim\;} \tilde{G}_0^s$, so daß $\phi \circ \gamma_\phi{}^{-1} = \tau_\gamma^s$.

Sei $\Omega : = \{ \omega = \sum_{\substack{\alpha_i \in \Delta \\ z_i \in \mathbb{Z}}} z_i \alpha_i \mid \langle \beta^\vee, \omega \rangle \geq 0$ für alle $\beta \in \Delta_0 \}$

<u>Bemerkung:</u> Bezeichnen wir das Fundamentalgewicht in Σ_0 zu $\alpha_i \in \Delta_0$ mit $\tilde{\omega}_i$, so haben wir :

$$\omega|_{T_0^s} = \sum_{\alpha_i \in \Delta_0} \langle \alpha_i^\vee, \omega \rangle \, \tilde{\omega}_i$$

Also ist Ω gerade die Menge in $X^*(T^s)$, die auf G_0^s irreduzible Darstellungen liefert.

Eine besonders wichtige Rolle werden folgende Teilmengen von Ω spielen : $\Omega_0 : = -(\Delta \setminus \Delta_0)$ und $\{-\mu\}$, wobei $-\mu$ die größte Wurzel von Σ bezeichnet.

Wir bezeichnen die irreduzible Darstellung von G_0^s, die $\omega|_{T_0^s}$ als dominantes Gewicht besitzt, mit ρ_ω .

Mit dem gewählten Isomorphismus $\phi : A \xrightarrow{\;\sim\;} \tilde{G}_0^s$ können wir ρ_ω auch als Darstellung von $\tilde{G}_0^s$ und A betrachten :

$$A \xrightarrow{\;\phi\;} \tilde{G}_0^s \xrightarrow{\;\pi\;} G_0^s \xrightarrow{\;\rho_\omega\;} Gl(V_\omega)$$

Wir nehmen nun die durch $\mathcal{J}$ vorgegebene Operation von Γ auf Δ. Die dadurch induzierte Operation von Γ auf $X^*(T^s)$ können wir beschreiben durch :

$$\gamma^*(\omega_\alpha) = \omega_{\gamma^*(\alpha)} .$$

Dann sind Ω_0 und $\{-\mu\}$ invariant unter dieser Operation, auf die wir uns für den Rest dieses Kapitels stets beziehen wollen.

<u>6.2.</u> <u>SATZ :</u> ([32] , Prop. 5)

<u>Sei</u> $\Omega' \subset \Omega$ <u>eine endliche</u> Γ - <u>invariante Teilmenge.</u>

i) <u>Existiert eine Gruppe</u> G <u>wie in</u> 2.1. , <u>so ist die Darstellung</u> $(A, \bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega, \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \rho_\omega)$ Γ - <u>äquivalent zu einer k-Darstellung von</u> A .

ii) <u>Ist</u> $\Omega' = -(\Delta \setminus \Delta_0)$, <u>so ist die Bedingung</u> i) <u>auch hinreichend für die Existenz von</u> G .

Beweis :

Zu i)

1) Die Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ ergibt einen Homomorphismus $\varkappa : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ und F sei das Bild von Γ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. Wie früher sei $B := Z_{\mathrm{Aut}(G^s)}(S^s)$ und $f : B \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ die kanonische Abbildung. Dann bezeichnen wir $\hat{B} := f^{-1}(F)$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß $\hat{B} \simeq Z_{G^s}(S^s) \rtimes F$ ist.

Betrachtet man den Schnitt :

$$n : \mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^s, B^s, T^s)$$

so ist $n(F) \subset \hat{B}$ nach Definition von S^s und :

$$\hat{B} \simeq Z_{G^s}(S^s) \rtimes F .$$

Wegen der Adjungiertheit von G^s ist $\mathrm{Aut}(G^s)$ isomorph zu $\mathrm{Int}(G^s) \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ und unsere Behauptung ist bewiesen.

2) Die Darstellung $\rho = \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \rho_\omega : G_0^s \longrightarrow \mathrm{Gl}(\bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega)$ soll nun so zu einer Darstellung

$$\hat{\rho} : \hat{B} \longrightarrow \mathrm{Gl}(\bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega)$$

erweitert werden, daß für alle $f \in F$ gilt : $\hat{\rho}(f)(V_\omega) = V_{\gamma(\omega)}$, wenn $\gamma \in \Gamma$ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ auf f abgebildet wird.

Wir bemerken zunächst, daß $\hat{B}^o = Z_{G^s}(S^s)$ und daß $G_0^s = D(\hat{B}^o)$.

Dann erweitert sich ρ_ω nach [36], Lemme 3.2. eindeutig zu einer Darstellung $\hat{\rho}_\omega^o$ von $\hat{B}^o$ mit dominantem Gewicht ω.

Man braucht $\hat{\rho}_\omega^o$ nur auf $S_1 = \mathrm{Zentrum}(\hat{B}^o)$ anzugeben und läßt es dort mit ω operieren :

$$\hat{\rho}_\omega^o(t)(v) = \omega(t).v \quad , t \in S_1 , \quad v \in V_\omega .$$

Dann definieren wir $\hat{\rho}^o = \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \hat{\rho}_\omega^o$.

Wir wählen nun zu jedem $\omega \in \Omega'$ einen Eigenvektor $v_\omega \in V_\omega$ zu ω und erweitern $\hat{\rho}^o$ auf F, so daß gilt :

$$\hat{\rho}(f)(v_\omega) = v_{\gamma(\omega)} \quad \text{für } f \in F , \omega \in \Omega' \text{ und } \varkappa(\gamma) = f .$$

Damit haben wir eindeutig eine Darstellung $\hat{\rho} : \hat{B} \longrightarrow \mathrm{Gl}(\bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega)$ definiert.

3) Es existiere eine Gruppe G mit den Bedingungen von 2.1., dann ist zu zeigen, daß $(A, \bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega , \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \rho_\omega)$ Γ - äquivalent zu einer k-Darstellung von A ist.

Wir führen folgende Bezeichnung ein : $V_{\Omega'} := \bigoplus_{\omega \in \Omega'} V_\omega$ und $\rho_{\Omega'} := \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \rho_\omega$.

Nach Satz 3.1.3. wissen wir, daß es ein $\tau \in Z^1(k, B(K))$ gibt, dessen Bild in $Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^s))$ inner kohomolog zu τ' ist und das verträglich mit der Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ ist. Also gehört für alle $\gamma \in \Gamma$ das Bild von τ_γ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ zu F. Die Bedingung von Satz 3.1.3. besagt also, daß $\tau \in Z^1(k, \hat{B}(K))$.

Wir wollen eine Einbettung : $j : \hat{B} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\tilde{G}_0^s , V_{\Omega'} , \rho_{\Omega'})$ und die (k-) Darstellung $(\tilde{G}_0^s , V_{\Omega'} , \rho_{\Omega'})$ mit $j_*(\tau)$ twisten, um die gesuchte k-Darstellung von A zu finden.

Wir betrachten $\lambda : \hat{B}(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(G_0^s) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^s)$ und können damit $\hat{B}$ in $\mathrm{Aut}(\tilde{G}_0^s , V_{\Omega'} , \rho_{\Omega'})$ einbetten :

$$\begin{aligned} j : \hat{B} &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\tilde{G}_0^s , V_{\Omega'} , \rho_{\Omega'}) \\ b &\longmapsto (\lambda(b), \hat{\rho}(b)) \end{aligned}$$

Wir definieren : $a_\gamma = \lambda(\varkappa(\gamma))$.

Dann ist für alle $\gamma \in \Gamma$ $j_*(\tau)_\gamma$ ein K-Automorphismus von $(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$, wir können mit $j_*(\tau)$ twisten und behaupten:

4) $j_*(\tau)(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ <u>ist Γ-äquivalent zu</u> $(A, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$

Sei $(\alpha, \psi) : (\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}) \longrightarrow j_*(\tau)(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$

ein K-Isomorphismus, der den Kozykel $j_*(\tau)$ definiert, dann haben wir:

$$(A, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}) \xrightarrow{(\alpha\circ\Phi,\ \psi)} j_*(\tau)(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$$

Nach den Voraussetzungen über α, τ und Φ können wir annehmen, daß $\alpha \circ \Phi = \mathrm{Id}_A$. Schreiben wir nun $j_*(\tau)_\gamma = (\tau_\gamma^1, \tau_\gamma^2)$, so ist wegen der Verträglichkeit von τ mit der Operation von Γ

$$\rho_\omega \circ \tau_\gamma^1 \text{ äquivalent zu } \rho_{\gamma(\omega)}, \quad \omega \in \Omega', \quad \gamma \in \Gamma .$$

Wegen $\rho_\omega \circ \tau_\gamma^1 = \tau_\gamma^2 \circ \rho_\omega \circ (\tau_\gamma^2)^{-1}$ heißt das aber:

$$\tau_\gamma^2 : V_\omega \longrightarrow V_{\gamma(\omega)}$$

Also: $\psi(V_{\gamma(\omega)}) = \psi(\tau_\gamma^2(\gamma(V_\omega))) = \gamma(\psi(V_\omega))$ d.h. die Darstellungen $(A, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ und $j_*(\tau)(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ sind Γ-äquivalent.

Zu ii)

Es existiere eine k-Darstellung (A, V', ρ') die Γ-äquivalent zu $(A, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ ist.

5) Sei $(1, \psi) : (A, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}) \longrightarrow (A, V', \rho')$

der K-Isomorphismus, der die Γ-Äquivalenz der beiden Darstellungen liefert, dann können wir (A, V', ρ') als k-Form von $(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ durch den Kozykel

$$\{\tau'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{\Phi\circ{}^\gamma\Phi^{-1}, \psi^{-1}\circ{}^\gamma\psi\}_{\gamma\in\Gamma} \in Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}))$$

auffassen.

6) <u>In dem betrachteten Spezialfall</u> $\Omega' = -(\Delta \setminus \Delta_0)$ <u>wird die in</u> 3) <u>angegebene Einbettung</u> j <u>injektiv :</u>

In 5.6. haben wir $\mathrm{Aut}(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$ zerlegt und dabei einen Torus S' der Dimension $\#(\Omega')$ gefunden. Nun ist $\hat{B}^o \simeq G_0^s.S_1$, wobei $S_1 = \mathrm{Zentrum}(Z(S^s))$, und nach Korollar II, 4.1.2. ist

$$S_1 = \bigcap_{\alpha\in\Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$$

Also ist $\mathrm{Dim}(S_1) = \mathrm{Dim}(S')$ und da $j(S_1) \subset S'$, folgt:

$$j(S_1) \simeq S' .$$

Schreiben wir jetzt $\mathrm{Aut}(\tilde{G}_0^s, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}) \simeq (\tilde{G}_0^s.S').A_{\rho_{\Omega'}}$, so ist das Produkt semidirekt und $j(\hat{B}^o) \subset (\tilde{G}_0^s.S')$ und $j(F) \subset A_{\rho_{\Omega'}}$, also genügt es, die Injektivität von $j|_{\hat{B}^o}$ und $j|_F$ nachzuprüfen. Für $b \in \hat{B}^o$ gilt aber:

$j(b) = 1 \Leftrightarrow (\mathrm{Int}(b), \hat{\rho}(b)) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Int}(b) = 1$ und $\hat{\rho}(b) = 1$
$\Leftrightarrow b \in Z(\hat{B}^o)$ und (da $b \in T^s$) für alle $\omega \in \Omega'$ ist $\omega(b) = 1$
$\Leftrightarrow b \in \bigcap_{\alpha\in\Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha)$ und $b \in \bigcap_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta_0} \mathrm{Ker}(\alpha) \Leftrightarrow b = 1$.

also ist $j|_{\hat{B}^o}$ injektiv.

Sei nun $\gamma \in \Gamma$ mit $\varkappa(\gamma) = f \in F$, dann :
$j(f) = 1 \Leftrightarrow a_\gamma = 1$ und $\hat{\rho}(f) = 1 \Leftrightarrow \gamma$ operiert trivial auf Δ_0 und γ operiert trivial auf $\Omega' \Leftrightarrow \gamma$ operiert trivial auf $\Delta \Leftrightarrow f = 1$, also ist auch $j|_F$ injektiv.

7) Als nächstes behaupten wir :

$$\tau' \in \mathrm{Bild}\Big(Z^1(k, \hat{B}(K)) \xrightarrow{j_*} Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^{\bullet}, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'}))\Big)$$

Wir zerlegen $\tau'_\gamma = \xi_\gamma \cdot \eta_\gamma \in (\tilde{G}_0^{\bullet} . S').A_{\rho_{\Omega'}}$ und schreiben andererseits wie in 4) $\tau'_\gamma = (\tau'^1_\gamma , \tau'^2_\gamma)$. Wegen 6) liefert j eine Bijektion auf die K-Automorphismen von $(\tilde{G}_0^{\bullet}, V_{\Omega'}, \rho_{\Omega'})$, die die ρ_ω und V_ω , $\omega \in \Omega'$ mit den äußeren Automorphismen von F permutieren.
Nun gilt aber $\tau'^2_\gamma : V_\omega \longrightarrow V_{\eta_\gamma(\omega)}$ und wegen der Γ - Äquivalenz der Darstellungen ist die getwistete Operation auf den V_ω gegeben durch :

$$\begin{aligned} {}^{\gamma}V_\omega &= \tau'^2_\gamma\, {}^{\gamma}V_\omega = \psi^{-1} \circ \gamma \circ \psi \circ \gamma^{-1} \circ \gamma\, (V_\omega) \\ &= \psi^{-1} \circ \gamma \circ \psi\, (V_\omega) = V_{\gamma(\omega)} . \end{aligned}$$

Also ist $\eta_\gamma \in j(F)$ und unsere Behauptung ist bewiesen.

8) Wir liften τ' zu einem Kozykel $\tau \in Z^1(k, \hat{B}(K))$, dann erfüllt τ die Bedingungen von Satz 3.1.3. :
Zunächst ist klar, daß τ verträglich mit der Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ ist. Das kanonische Bild von τ_γ in $\mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^{\bullet})$ ist nach Konstruktion aber gerade $\phi \circ {}^{\gamma}\phi^{-1}$, also ist auch die zweite Bedingung erfüllt und G existiert nach Satz 3.1.3. .

6.2.1. KOROLLAR :
Operiert Γ trivial auf $\Delta \setminus \Delta_0$, so existiert G genau dann, wenn A für alle $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_0$ eine k-Darstellung zum höchsten Gewicht $\sum_{\beta \in \Delta_0} \langle \beta^\vee, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_\beta$ besitzt.

Beweis : Folgt unmittelbar aus Satz 6.2. und Bemerkung 5.6.6. .

Betrachten wir nun die Verallgemeinerung des Problems im Sinne von 2.4. und setzen wir A nicht mehr als anisotrop voraus. Sei Δ'_0 eine Γ - invariante Teilmenge von Δ , so daß der durch Δ'_0 definierte Unterindex $\mathcal{J}'_0$ als Index von A aufgefaßt werden kann, dann lautet die Bedingung :

6.2.2. KOROLLAR :
Operiert Γ trivial auf $\Delta \setminus \Delta'_0$, so existiert G genau dann, wenn A für alle $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'_0$ eine k-Darstellung zum höchsten Gewicht $\sum_{\beta \in \Delta'_0} \langle \beta^\vee, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_\beta$ besitzt.

Beweis : Satz 6.2. läßt sich ohne Schwierigkeit auf die betrachtete Situation verallgemeinern, dann folgt die Behauptung wie oben aus Bemerkung 5.6.6. .

6.2.3. KOROLLAR :
Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Gruppe G ist, daß die Darstellung :

$$\rho_{-\mu} : A \longrightarrow Gl(V_{-\mu})$$

äquivalent zu einer k-Darstellung von A ist.

6.3. Die Bedingung an die Brauer - Invariante

Wir formulieren Satz 6.2. in eine Bedingung an die Brauer - Invariante um und beschränken uns dabei auf den inneren Fall.

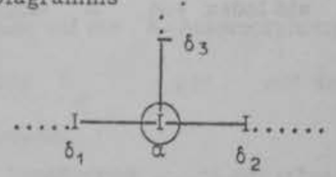
6.3.1. SATZ :

Die Operation von Γ auf $\mathcal{D}$ sei trivial. Wir identifizieren die Punkte des Dynkin Diagramms von A mit Δ_0. Dann existiert G genau dann, wenn für alle $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_0$ gilt :

$$\alpha_{A,k}\left({\sum_{\eta \in \Delta_0}}' \langle \eta^\vee , -\alpha \rangle \, \tilde{\omega}_\eta \right) = 1 .$$

Beweis : Spezialfall von Korollar 6.2.1. .

Damit erhält man eine recht handliche Bedingung an die Brauer - Invariante des anisotropen Kerns . Betrachtet man z. B. folgenden Ausschnitt eines Dynkin Diagramms :



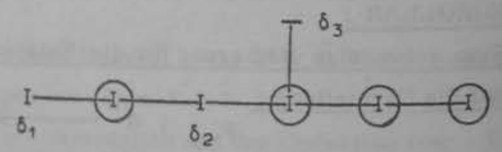
so ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \langle \delta_i^\vee , -\alpha \rangle \, \tilde{\omega}_{\delta_i} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{\omega}_{\delta_i}$.

Also besagt die Bedingung von Satz 6.3.1. :

$$\beta_{A,k}\left(\overline{\sum_{i=1}^{3} \tilde{\omega}_{\delta_i}} \right) = \prod_{i=1}^{3} \beta_{A,k}\left(\overline{\tilde{\omega}_{\delta_i}} \right) = 1 .$$

6.3.2. Beispiel :

$E^9_{7,4}$



Der anisotrope Kern G_0 ist vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$, also ist $G_0 = Sl_{1,D_1} \times Sl_{1,D_2} \times Sl_{1,D_3}$ mit Quaternionendivisionsalgebren D_i .

Schreiben wir β für $\beta_{G_0,k}$ und ε_i für $\tilde{\omega}_{\delta_i}$, so erhalten wir mit Satz 6.3.1. :

$$\beta(\overline{\varepsilon_1}).\beta(\overline{\varepsilon_2}) = \beta(\overline{\varepsilon_2}).\beta(\overline{\varepsilon_3}) = 1 \text{ , also}$$

$$[D_1].[D_2] = [D_2].[D_3] = 1 \text{ , woraus folgt :}$$

$$[D_1] = [D_2] = [D_3] = [D] .$$

Also ist $G_0 = Sl_{1,D} \times Sl_{1,D} \times Sl_{1,D}$ und die Formen vom Typ $E^9_{7,4}$ werden durch Quaternionenalgebren klassifiziert.

§ 7 Der innere Fall ([32] , Prop. 7)

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß Γ trivial auf $\mathcal{D}$ operiert.

7.1. DEFINITION :

Sei $\rho : A \longrightarrow Gl(V)$ eine lineare Darstellung, dann sagen wir " ρ faktorisiert durch G_0^* " , wenn es eine lineare Darstellung $\rho' : G_0^* \longrightarrow Gl(V)$ gibt, so daß $\rho = \rho' \circ \pi \circ \Phi$ (wobei wie früher $A \xrightarrow{\Phi} \tilde{G}_0^* \xrightarrow{\pi} G_0^*$).

7.2. SATZ :

Sei ρ eine lineare irreduzible Darstellung von A , die über K definiert ist und durch G_0^* faktorisiert. Dann ist eine notwendige Bedingung für die Existenz von G , daß ρ äquivalent zu einer k-Darstellung von A ist.

Beweis : Da G_0^* k-zerfallend ist, können wir annehmen, daß ρ' aus 7.1. über k definiert ist. Existiert nun ein G mit den gewünschten Eigenschaften, so gibt es nach 4.3. einen Kozykel $\tau \in Z^1(k, G_0^*(K))$, dessen Bild $\bar{\tau}$ in $Z^1(k, \overline{G_0^*}(K))$ kohomolog zu $\tau^* = \tau^{\Phi}$ ist. Wie im Beweis von Satz 6.2. können wir nun $G_0^*(K)$ in $Aut_K(\tilde{G}_0^* , V , \rho)$ einbetten :

$$\begin{aligned} j : G_0^s(K) &\longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\tilde{G}_0^s, V, \rho) \\ g &\longmapsto (\widetilde{\mathrm{Int}(g)}, \rho'(g)) \end{aligned}$$

wobei wieder $\pi(\widetilde{\mathrm{Int}(g)}(x)) = \mathrm{Int}(g)(\pi(x))$.

Dann ist $j_*(\bar{\tau})(\tilde{G}_0^s, V, \rho)$ die gewünschte k-Darstellung von A.

7.3. SATZ: ([32] , Prop. 7)

Sei $\{\rho_i\}_{i\in I}$ eine endliche Menge irreduzibler linearer Darstellungen von A , die über K definiert sind, so daß $\rho := \bigoplus_{i\in I} \rho_i$ durch eine treue Darstellung von G_0^s faktorisiert . Dann existiert G genau dann, wenn jedes ρ_i äquivalent zu einer k-Darstellung von A ist.

Beweis : Sei $\#(I) = n$, dann haben wir unter Benutzung der Diagramme in 5.2.3. zur kohomologischen Definition von β :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "c=(c_1,\dots,c_n)"] & G_0^s \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus_{i\in I}\rho_i'"] & \overline{G_0^s} \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus_{i\in I}\bar{\rho}_i"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & ({}_k\mathrm{Mult})^n \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Gl}(V_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} \mathrm{PGl}(V_i) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Das ergibt in der Kohomologie :

$$\begin{tikzcd} H^1(k, G_0^s) \arrow[r, "\pi_*"] & H^1(k, \overline{G_0^s}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^2(k, C) \arrow[d, "c_*"] \\ & H^1(k, \bigoplus_{i\in I} \mathrm{PGl}(V_i)) \arrow[r] & H^2(k, ({}_k\mathrm{Mult})^n) = \mathrm{Br}(k)^n \end{tikzcd}$$

Seien zunächst alle ρ_i äquivalent zu k-Darstellungen von A . Dann können wir annehmen, daß die Darstellungen ρ_i' , durch die die ρ_i faktorisieren über k definiert sind. Ist λ_i das dominante

Gewicht zu ρ_i , so gilt für alle $i \in I$:

$$\beta_{A,k}(\bar{\lambda}_i) = 1$$

Nun ist aber $\beta_{A,k}(\bar{\lambda}_i) = c_{i*}(\delta([\tau^q])) = 1$. Nach Voraussetzung ist $\rho' = \bigoplus_{i\in I} \rho_i' : G_0^s \longrightarrow \mathrm{Gl}(\bigoplus_{i\in I} V_i)$ treu, also ist die induzierte Abbildung $c = (c_1, \dots, c_n) : C \longrightarrow ({}_k\mathrm{Mult})^n$ injektiv. Wir haben also die exakte Sequenz :

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow {}_k\mathrm{Mult}^n \longrightarrow {}_k\mathrm{Mult}^n/C \longrightarrow 1$$

In der Kohomologie ergibt das :

$$H^1(k, {}_k\mathrm{Mult}^n/C) \longrightarrow H^2(k, C) \xrightarrow{c_*} H^2(k, {}_k\mathrm{Mult}^n)$$

Da ${}_k\mathrm{Mult}^n/C$ ein k-zerfallender Torus ist, haben wir $H^1(k, {}_k\mathrm{Mult}^n/C) = 0$, also ist c_* injektiv und deshalb $\delta([\tau^q]) = 0$. Daraus folgt aber , daß $[\tau^q]$ zum Bild von

$$H^1(k, G_0^s) \longrightarrow H^1(k, \overline{G_0})$$

gehört und G existiert nach Satz 4.3. .

Existiert umgekehrt G mit den gewünschten Eigenschaften, so folgt aus Satz 4.3. , daß $[\tau^q] \in \mathrm{Bild}\big(H^1(k, G_0^s) \longrightarrow H^1(k, \overline{G_0^s})\big)$. Also ist $\delta([\tau^q]) = 0$ und damit auch $c_*(\delta([\tau^q])) = 1$

Das bedeutet aber , daß für alle $i \in I$ $\beta_{A,k}(\bar{\lambda}_i) = 1$, also alle ρ_i äquivalent zu k-Darstellungen von A sind.

Bemerkung : Dieser Beweis gilt in unseren Konventionen nur im Fall eines perfekten Grundkörpers. Im nicht-perfekten Fall hätte man sich der inseparablen Galoiskohomologie (P. Cartier, Inseparable Galois Cohomology , Proc. Symp. Pure Math. , vol. 9, A.M.S., 1966, p. 183) zu bedienen, oder die Konstruktionen aus [36] zu benutzen.

KAPITEL V

Klassifikation der Ausnahmegruppen

§ 1 Die Klassifikation ließe sich nun im Prinzip wie in dem Beispiel IV 6.3.2. durchführen, durch einen Hinweis von Herrn J. C. Jantzen ist es aber möglich, die Existenzkriterien des letzten Kapitels so umzuformulieren, daß die Behandlung der inneren Formen (besonders bei E_8) sehr vereinfacht und abgekürzt wird und auch einige äußere Formen damit erfaßt werden können. Diese Sätze werden in §2 formuliert und bewiesen. Die Klassifikation wird dann in den §§ 3 und 4 durchgeführt : es wird gezeigt, daß die in [32] , Table II aufgeführten Indizes die einzig möglichen sind. Da die klassischen Gruppen stets getrennt behandelt wurden, haben wir die Klassifikationsergebnisse hier vorausgesetzt (siehe dazu: [32] und [42]). Wir beweisen die Existenz (zum Teil auch über speziellen Körpern) in allen Fällen, die sich elementar mit den Ergebnissen des letzten Kapitels behandeln lassen. Wenn abweichende Methoden wie etwa das "Hasse-Prinzip" benötigt werden (trialitäre D_4 und anisotrope innere E_6) zitieren wir die Ergebnisse ohne Beweis, ebenso wie in den Fällen, wo zur Konstruktion Ausnahme-Jordanalgebren herangezogen werden ($E^{78}_{7,1}$, $E^{78}_{8,2}$, $E^{133}_{8,1}$). Die anderen Fälle werden in den §§ 5 und 6 diskutiert.

Wenn wir schreiben, daß eine Form von einem gewissen Typ durch quadratische oder hermitesche Formen mit bestimmten Bedingungen klassifiziert wird, so verstehen wir darunter stets die Ähnlichkeitsklassen dieser quadratischen oder hermiteschen Formen.

Der Hauptteil dieses Kapitels war, bis auf die angedeuteten Änderungen, in zwei Vorträgen von Prof. Tits enthalten, die er im Wintersemester 1972/73 hielt. Angefügt sind noch Beweise für einige Existenzaussagen äußerer Formen von E_6 , die sich ohne lokale Theorie führen ließen.

§ 2 **Existenzkriterien**

Wir betrachten das in IV , 2.1. formulierte Problem, eine k-anisotrope k-Gruppe A bis auf zentrale Isogenie als halbeinfachen anisotropen Kern einer Gruppe G mit gegebenem Index aufzufassen. Weiter werden wir in bestimmten Fällen die Verallgemeinerung auf den halbeinfachen Kern und den partiellen Index diskutieren (IV , 2.4.). Wir übernehmen die Bezeichnungen aus IV , § 2 und § 5 und setzen G als einfach zusammenhängend voraus .

Das Fundamentalgewicht zu $\alpha \in \Delta$ bezeichnen wir mit ω_α , dann ist $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ eine Basis von Λ .

Setzt man die durch $\mathcal{J}$ gegebene Operation von Γ auf Δ $\mathbb{Q}$ - linear fort, so operiert Γ folgendermaßen auf den ω_α

$$\gamma(\omega_\alpha) = \omega_{\gamma(\alpha)} \quad , \gamma\in\Gamma$$

In Analogie zu IV , 5.5. definieren wir nun :

Sei $Z \subset \Delta$ ein Γ - Orbit, dann sei λ_Z das Element von Λ^Γ mit:

$$\langle \alpha^\vee , \lambda_Z \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha\notin Z \\ 1 & \text{falls } \alpha\in Z \end{cases}$$

Die λ_Z bilden eine Basis von Λ^Γ .

Sei nun Λ_A die von $\{\omega_\alpha \mid \alpha\in\Delta_0\}$ erzeugte Untergruppe, dann läßt sich Λ_A zusammen mit der induzierten Operation von Γ mit der Charaktergruppe eines geeigneten maximalen Torus von A identifizieren. Die λ_Z mit $Z\subset\Delta_0$ bilden eine Basis von Λ_A^Γ und es sei $\alpha_{A,k} : \Lambda_A^\Gamma \longrightarrow Br(k)$ die Brauer- Invariante von A . Sei nun $\varphi : \Lambda^\Gamma \longrightarrow Br(k)$ der folgendermaßen definierte Homomorphismus :

$$\varphi(\lambda_Z) = \begin{cases} \alpha_{A,k}(\lambda_Z) & \text{falls } Z\subset\Delta_0 \\ 1 & \text{falls } Z\subset\Delta\setminus\Delta_0 \end{cases}$$

Dann gilt :

2.1. SATZ :
Eine notwendige Bedingung für die Existenz von G ist, daß die oben konstruierte Abbildung , φ durch $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^{\Gamma} = \Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma}$ faktorisiert.

Beweis.: Existiert eine Gruppe G wie oben, so können wir Λ zusammen mit der Operation von Γ mit der Charaktergruppe eines maximalen Torus von G identifizieren . Nach Satz IV , 5.5.1. ist dann φ die Brauer - Invariante von G , also faktorisiert φ nach Satz IV , 5.2.2. durch $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^{\Gamma}$.

Beispiel : Da der Zusammenhangsindex von E_8 gleich 1 ist, kann der anisotrope Kern einer Form vom Typ E_8 keinen Faktor vom Typ A_n enthalten.

2.2. SATZ :
Operiert Γ trivial auf $\Delta\setminus\Delta_0$, so existiert G genau dann, wenn φ durch $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^{\Gamma}$ faktorisiert.

Beweis : Man überlegt sich leicht, daß

$$\Big\{ \sum_{\alpha \in Z} -\alpha \;\Big|\; \text{für alle } \Gamma\text{-Orbits } Z \text{ in } \Delta \Big\}$$

eine Basis von $\bar{\Lambda}^{\Gamma}$ bildet. Also faktorisiert φ genau dann durch $\Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma}$, wenn gilt :

Für alle Γ - Orbits Z in Δ ist $\varphi\big(\sum_{\alpha \in Z} -\alpha\big) = 1$.

Benutzen wir nun, daß $-\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \omega_{\beta}$, so bedeutet das, daß φ genau dann durch $\Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma}$ faktorisiert, wenn für alle Γ - Orbits Z in Δ gilt :

$$\varphi\Big(\sum_{\alpha \in Z} \sum_{\beta \in \Delta} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \omega_{\beta}\Big) = 1$$

Nach Konstruktion von φ ist aber :

$$\varphi\Big(\sum_{\alpha \in Z} \sum_{\beta \in \Delta} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \omega_{\beta}\Big) = \alpha_{A,k}\Big(\sum_{\alpha \in Z} \sum_{\beta \in \Delta_0} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_{\beta}\Big)$$

Da $\alpha_{A,k}$ die Brauer - Invariante von A ist, gilt für $Z \subset \Delta_0$ stets :

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\sum_{\alpha \in Z} -\alpha\Big) &= \alpha_{A,k}\Big(\sum_{\alpha \in Z} \sum_{\beta \in \Delta_0} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_{\beta}\Big) \\ &= \alpha_{A,k}\Big(\sum_{\alpha \in Z} -\alpha\Big) \\ &= 1 \quad \text{(siehe IV , 5.2.)} . \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \Delta\setminus\Delta_0$ ist nach Voraussetzung $\Gamma(\alpha) = \alpha$, Da für alle $\beta \in \Delta_0$ gilt : $\langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \geq 0$, ist

$$\sum_{\beta \in \Delta_0} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_{\beta}$$

ein dominantes Gewicht für A . Also faktorisiert φ genau dann durch $\Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma}$, wenn A für alle $\alpha \in \Delta\setminus\Delta_0$ eine k-Darstellung zum dominanten Gewicht :

$$\sum_{\beta \in \Delta_0} \langle \beta^{\vee}, -\alpha \rangle \tilde{\omega}_{\beta}$$

besitzt. Das ist aber nach Korollar IV , 6.2.1. äquivalent zur Existenz von G .

Wir wollen Satz 2.2. noch im Sinne von Bemerkung IV , 2.4. verallgemeinern. Sei dazu für den Augenblick A' nicht mehr notwendig anisotrop und Δ_0' eine Γ - invariante Teilmenge von Δ mit $\Delta_0' \supset \Delta_0$ und so daß die von $\{ \omega_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta_0' \}$ erzeugte Untergruppe $\Lambda_{A'}$ wie früher mit der Charaktergruppe eines geeigneten maximalen Torus von A' identifiziert werden kann .
Ersetzt man nun bei der Definition von φ Δ_0 durch Δ_0' und Λ_A durch $\Lambda_{A'}$, so haben wir die folgende Antwort auf das

verallgemeinerte Problem :

2.3. SATZ :
Sei Δ'_0 wie oben, so daß Γ trivial auf $\Delta \setminus \Delta'_0$ operiert. Dann existiert G genau dann, wenn φ durch $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^{\Gamma}$ faktorisiert.

Beweis : Der Beweis von Satz 2.2. läßt sich sofort auf die hier betrachtete Situation ausdehnen. Dann liefert Korollar IV, 6.2.2. die Behauptung.

2.4. Bemerkung : Falls G existiert, wird φ in allen betrachteten Fällen die Brauer-Invariante von G . In Analogie zu der bisherigen Terminologie bezeichnen wir deshalb die nach Satz 2.2. bzw. 2.3. induzierte Abbildung von $\Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma}$ in Br(k) mit β :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{\Gamma} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathrm{Br}(k) \\
& \Lambda^{\Gamma}/\bar{\Lambda}^{\Gamma} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

§ 3 Klassifikation der inneren Formen

Wir übernehmen die Numerierung der Dynkin Diagramme aus dem Anhang. Wir bezeichnen die einfache Wurzel α_i mit i , das zugehörige Fundamentalgewicht mit ω_i und sein Bild in C^* mit $\bar{\omega}_i$.

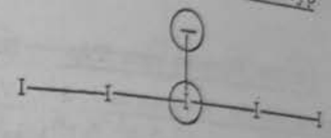
3.1. Innere Formen von E_6

Der Zusammenhangsindex von E_6 ist 3 . Enthält der anisotrope Kern einen Faktor vom Typ ${}^1A_n$, so kann dieser Faktor nach Satz 2.1. nur vom Typ ${}^1A_2$ sein. Wegen der Relationen der $\bar{\omega}_i$ (siehe IV, 5.4.) kann ein solcher nur an den Stellen (1, 2)

oder (4, 5) liegen. Da aber der Index invariant unter der Oppositionsinvolution ist (Satz III, 2.2.5.), muß er an beiden Stellen auftreten. Dann ist 3 ausgezeichnet, also auch 6 , weil sonst der anisotrope Kern einen Faktor vom Typ A_1 enthielte. Also folgt

3.1.1. Enthält der anisotrope Kern einen Faktor vom Typ ${}^1A_n$, so ist der Index :

${}^1E^{16}_{6,2}$



Der anisotrope Kern einer Form vom Typ ${}^1E^{16}_{6,2}$ ist also $Sl_{1,D_1} \times Sl_{1,D_2}$ mit zentralen Divisionsalgebren D_1 und D_2 mit Grad(D_1) = 3 . Die Bedingung an die Brauer-Invariante besagt hier (s. IV, 6.3.1.), daß bei geeigneter Wahl der D_i :

$$[D_1] = [D_2]$$

Also folgt mit Satz 2.2. :

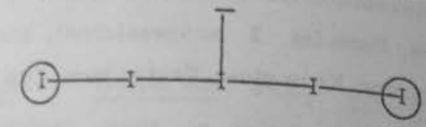
3.1.2. Die Formen vom Typ ${}^1E^{16}_{6,2}$ werden durch Paare von opponierten zentralen Divisionsalgebren vom Grad 3 klassifiziert.

Betrachten wir nun die Formen, deren anisotroper Kern keinen Faktor vom Typ ${}^1A_n$ enthält und die weder anisotrop noch zerfallend sind. Dann kann der anisotrope Kern nur noch Faktoren vom Typ D_4 oder D_5 enthalten. Wäre letzteres der Fall, so müßte der Index folgendermaßen aussehen :

Das ist aber nach Satz III, 2.2.5. unmöglich, also erhalten wir :

3.1.3. SATZ :
Es gibt über keinem Körper anisotrope quadratische Formen in 10 Variablen mit Diskriminante und Hasse - Invariante 1 .

Es bleibt also nur der Fall übrig, daß der anisotrope Kern vom Typ D_4 ist :

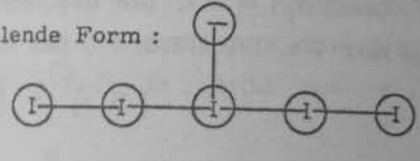
$^1E^{28}_{6,2}$ 

Mit Satz 2.2. folgt :

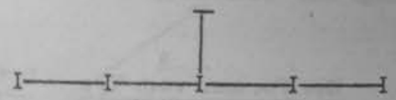
3.1.4. Die Formen vom Typ $^1E^{28}_{6,2}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse - Invariante 1 klassifiziert.

(Über $\mathbb{R}$ hat z.B. die Euklidische Form diese Eigenschaft : siehe [9] , § 9 , exerc. 7)

Es bleiben nur noch die zerfallende Form :

$^1E^{0}_{6,6}$ 

und die anisotrope Form :

$^1E^{78}_{6,0}$ 

auf deren Existenz wir nicht weiter eingehen.

3.2. Formen von E_7

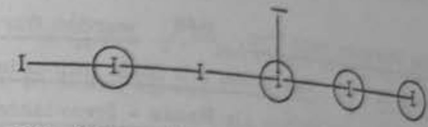
Der Zusammenhangsindex ist 2 , also kann nach Satz 2.1. ein Faktor des anisotropen Kerns vom Typ ^1A_n nur einer vom Typ A_1 sein. Da $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_7 \neq 0$ und alle anderen $\bar{\omega}_i = 0$ sind, können diese Faktoren nur an den Stellen 1 , 3 und 7 auftreten.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß nur Faktoren vom Typ A_1 im anisotropen Kern auftreten :

Liegt einer in 7 , so folgt aus $\beta(\bar{\omega}_1) = \beta(\bar{\omega}_3) = \beta(\bar{\omega}_7)$, daß auch 1 und 3 nicht ausgezeichnet sind. Also sind 2 und 4 ausgezeichnet und wegen $\beta(\bar{\omega}_5) = \beta(\bar{\omega}_6) = 1$ sind auch 5 und 6 ausgezeichnet.

Ist dagegen 3 nicht ausgezeichnet, so müssen 2 und 4 ausgezeichnet sein, und wir sind wieder im vorigen Fall.

Geht man davon aus, daß 1 nicht ausgezeichnet ist, und berücksichtigt man, daß nur Faktoren vom Typ A_1 auftreten sollen, so führt die obige Argumentation wieder auf denselben Fall , also

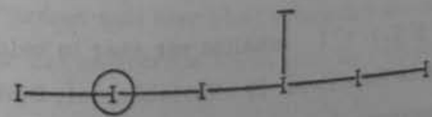
$E^{9}_{7,4}$ 

Der anisotrope Kern ist vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$, also $Sl_{1,D_1} \times Sl_{1,D_2} \times Sl_{1,D_3}$. Die Bedingung von Satz 2.2. besagt, daß $\beta(\bar{\omega}_1) = \beta(\bar{\omega}_3) = \beta(\bar{\omega}_7)$, das heißt $[D_1] = [D_2] = [D_3]$, also haben wir :

3.2.1. Die Formen vom Typ $E^{9}_{7,4}$ werden durch Quaternionen-divisionsalgebren klassifiziert.

Bei der obigen Diskussion führten die Fälle, in denen ein Faktor vom Typ A_1 in 3 oder 7 auftrat, ohne weitere Voraussetzung zu $E^{9}_{7,4}$. Tritt bei einer anderen Form ein Faktor vom Typ A_1 im anisotropen Kern auf, so muß er in 1 liegen.

Ist das der Fall, so ist 2 ausgezeichnet und 3 und 7 sind es nicht. Wäre 4 ausgezeichnet, würde das zu dem schon betrachteten Fall zurückführen. 5 kann nicht ausgezeichnet sein, weil sonst ein Faktor vom Typ A_3 im anisotropen Kern wäre, also bleiben nur die Fälle, in denen 6 ausgezeichnet oder nicht ausgezeichnet ist :

$E^{48}_{7,1}$ 

$E^{31}_{7,2}$ 

Es ist $\beta(\bar{\omega}_5) = \beta(\bar{\omega}_6) = 1$, also handelt es sich bei den Faktoren vom Typ D_4 bzw. D_5 um gewöhnliche orthogonale Gruppen (s. IV, 5.4.4.) und die Bedingung $\beta(\bar{\omega}_1) = \beta(\bar{\omega}_3) = \beta(\bar{\omega}_7)$ besagt, daß die Hasse - Invariante eine Quaternionenalgebra ist :

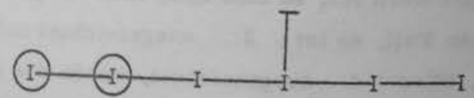
3.2.2. Die Formen vom Typ $E_{7,1}^{48}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 10 Variablen mit Diskriminante 1 und einer Quaternionendivisionsalgebra als Hasse - Invariante klassifiziert.

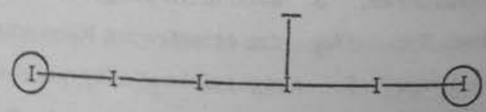
3.2.3. Die Formen vom Typ $E_{7,2}^{31}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante 1 und einer Quaternionendivisionsalgebra als Hasse-Invariante klassifiziert.

Zur Existenz verweisen wir in beiden Fällen auf § 5 (5.2.4. und 5.2.1.) .

Es bleiben die Fälle übrig, in denen der anisotrope Kern keinen Faktor vom Typ A_1 enthält. Dann kommen nur noch Gruppen vom Typ D_4, D_5, D_6 und E_6 in Frage .

Wäre der anisotrope Kern vom Typ D_5, so hätten wir zwei Möglichkeiten :

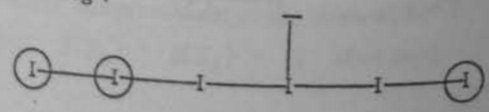




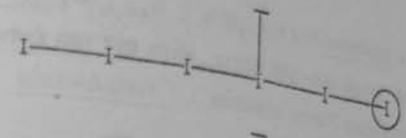
Wegen $\beta(\bar{\omega}_1) = 1$ erhalten wir aber in beiden Fällen gewöhnliche quadratische Formen in 10 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1, was nach Satz 3.1.3. unmöglich ist.

Damit bleiben (außer der anisotropen und der zerfallenden Form) nur noch die folgenden Fälle übrig :

$E_{7,3}^{28}$



$E_{7,1}^{66}$



$E_{7,1}^{78}$

Bei $E_{7,3}^{28}$ ist $\beta(\bar{\omega}_1) = 1$ und damit alle Brauer- Invarianten trivial, also sind wir in dem Fall von ${}^1E_{6,2}^{28}$:

3.2.4. Die Formen vom Typ $E_{7,3}^{28}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1 klassifiziert.

Bei $E_{7,1}^{66}$ ist eine der Hasse-Invarianten 1, die andere braucht nicht trivial zu sein ; die Darstellung als SO_{12} braucht also nicht über k definiert zu sein.

3.2.5. Die Formen vom Typ $E_{7,1}^{66}$ werden durch anisotrope pseudoquadratische Formen über Divisionsalgebren vom Grad d in 12 Variablen mit Diskriminante 1 und einer Hasse-Invariante 1 klassifiziert.

Die Existenzfrage wird in 5.2.2. behandelt.

3.2.6. Die Formen vom Typ $E_{7,1}^{78}$ werden durch die anisotropen inneren Formen von E_6 mit Brauer-Invariante 1 klassifiziert.

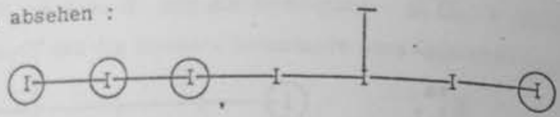
Die Existenz dieser Formen soll hier nicht untersucht werden - siehe aber § 7 . Ein Beispiel für die anisotrope Form von E_7 ist die kompakte Form über $\mathbb{R}$.

3.3. Formen von E_8

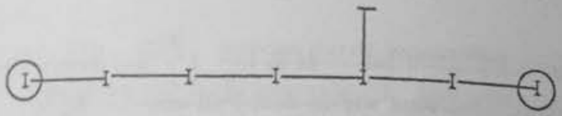
Der Zusammenhangsindex ist 1, also muß $\beta(\bar{\omega}_i) = 1$ für alle i sein. Der anisotrope Kern kann also keine Faktoren vom Typ ${}^1A_3$ enthalten und wegen Satz 3.1.3. auch keine vom Typ D_5 .

Es bleiben also nur noch D_4 , D_6 , D_7 , E_6 und E_7 als Möglichkeiten übrig, wenn wir von der anisotropen und der zerfallenden Form absehen :

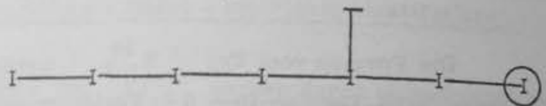
$E_{8,4}^{28}$



$E_{8,2}^{66}$

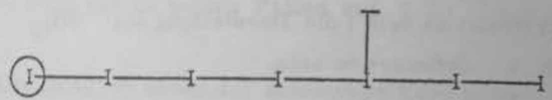


$E_{8,1}^{91}$



$E_{8,2}^{78}$

$E_{8,1}^{133}$



Da alle Brauer-Invarianten 1 sind, ergeben sich die Bedingungen sofort :

3.3.1. Die Formen vom Typ $E_{8,4}^{28}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1 klassifiziert.

Die Existenz solcher Formen haben wir - zumindest über $\mathbb{R}$ - schon in 3.1.4. diskutiert.

3.3.2. Die Formen vom Typ $E_{8,2}^{66}$ ($E_{8,1}^{91}$) werden durch anisotrope quadratische Formen in 12 (14) Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1 klassifiziert.

Zur Existenz solcher Formen verweisen wir auf 5.2.2. und 5.2.5. .

3.3.3. Die Formen vom Typ $E_{8,2}^{78}$ ($E_{8,1}^{133}$) werden durch anisotrope Formen vom Typ ${}^1E_6$ (E_7) mit Brauer-Invariante I klassifiziert.

Auf die Existenz dieser Formen gehen wir hier nicht näher ein (s. aber §7). Ein Beispiel für die anisotrope Form von E_8 ist die kompakte Form über $\mathbb{R}$.

3.4. Formen von F_4

Wieder ist der Zusammenhangsindex 1 , also kann der anisotrope Kern keine Faktoren vom Typ ${}^1A_n$ oder C_n enthalten. Außer der anisotropen und der zerfallenden Form kommt also nur noch B_3 als anisotroper Kern in Frage :

$F_{4,1}^{21}$

3.4.1. Die Formen vom Typ $F_{4,1}^{21}$ werden durch anisotrope quadratische Formen in 7 Variablen mit Hasse-Invariante 1 klassifiziert.

Über $\mathbb{R}$ besitzt die Euklidische Form diese Eigenschaften (s. [9], § 9 , exerc. 7) .

Auch hier liefert die kompakte Form über $\mathbb{R}$ ein Beispiel für die anisotrope Form von F_4 .

Bemerkung : Die Beschreibung der Formen von F_4 als Automorphismengruppe einer einfachen Ausnahme-Jordan Algebra findet man bei Chevalley-Schafer ([15]) .

3.5. Formen von G_2

Auch hier ist der Zusammenhangsindex 1 , so daß kein anisotroper Kern vom Typ A_1 auftreten kann : es bleiben nur die zerfallende und die anisotrope Form übrig und wieder ist die kompakte Form über

$\mathbb{R}$ ein Beispiel für die anisotrope Form .

Bemerkung : Die Beschreibung der Formen von G_2 als Automorphismengruppe einer Cayleyalgebra findet man bei Jacobson ([20]) .

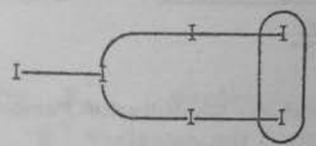
§ 4 Äußere Formen von E_6 und D_4

4.1. Äußere Formen von E_6

Für $^2E_6$ ist $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^\Gamma = \{1\}$, also kann der anisotrope Kern keine Faktoren vom Typ ^1A_n haben. Wir diskutieren zunächst die möglichen Indizes und kommen später auf die Klassifikation und Existenz zu sprechen.

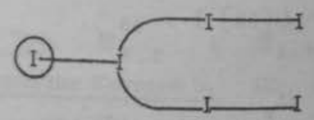
Ist 6 nicht ausgezeichnet, so kann es auch 3 nicht sein, weil sonst ein A_1 im anisotropen Kern wäre. Dann kann aber auch (2 , 4) nicht ausgezeichnet sein, weil sonst ein $^1A_2$ im anisotropen Kern wäre. Es bleiben also die anisotrope Form und :

$^2E^{29}_{6,1}$

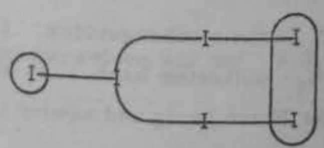


Ist nun 6 ausgezeichnet, 3 aber nicht, so kann wieder (2 , 4) nicht ausgezeichnet sein, weil sonst ein A_1 im anisotropen Kern wäre. Es bleiben also übrig :

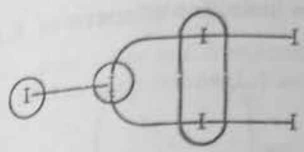
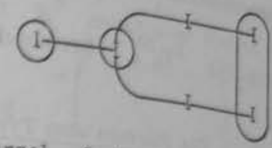
$^2E^{35}_{6,1}$



$^2E^{16'}_{6,2}$



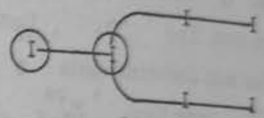
Sind nun 6 und 3 ausgezeichnet, fallen zunächst

 und 

wegen einer Reduktion der Wurzel 6 (s. III, 2.3.) aus : es entstehen unzulässige Indizes vom Typ $^2A_5$ (s. [32], Table II, ^2A_n) .

Außer der quasi-zerfallenden Form haben wir also nur noch :

$^2E^{16''}_{6,2}$



Auf die Formen vom Typ $^2E^{35}_{6,1}$ und $^2E^{16''}_{6,2}$ können wir Satz 2.2. und auf $^2E^{16'}_{6,2}$ Satz 2.3. anwenden.

4.1.1. Die Formen vom Typ $^2E^{35}_{6,1}$ ($^2E^{16'}_{6,2}$) werden klassifiziert durch nicht ausgeartete hermitesche Formen in m Variablen über einer k' - zentralen Divisionsalgebra vom Grad d mit Involution zweiter Art (wobei k' / k eine quadratische Erweiterung ist) . Es ist m. d = 6 , der Index der Form ist 0 (1) . Außerdem gilt $\beta_A(\overline{\omega_3}) = 1$.

Zur Existenz solcher Formen (über Zahlkörpern) siehe 6.4. und 6.5. .

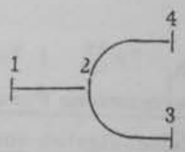
4.1.2. Die Formen vom Typ $^2E^{16''}_{6,2}$ werden klassifiziert durch nicht ausgeartete hermitesche Formen über einer zentral einfachen Divisionsalgebra D vom Grad 3 über einer quadratischen Erweiterung k'/k mit Involution zweiter Art. Die Dimension des Vektorraums über D ist 2 und der Index der hermiteschen Form ist 1 .

Aus 4.1.2. ziehen wir unmittelbar: Eine Form vom Typ ${}^2E_{6,2}^{16''}$ kann nicht über $\mathbb{R}$ existieren, weil $Br(\mathbb{C}) = \{1\}$.
Dagegen zeigen wir die Existenz solcher Formen über Zahlkörpern in 6.6..

Die Formen vom Typ ${}^2E_{6,1}^{29}$ werden durch den folgenden Satz erfaßt:

4.1.3. SATZ: Die Formen vom Typ ${}^2E_{6,1}^{29}$ werden klassifiziert durch anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante ungleich 1, so daß über einer quadratischen Erweiterung Diskriminante und Hasse-Invariante 1 werden.

Beweis: Ist G eine Gruppe vom Typ ${}^2E_{6,1}^{29}$, so ist der anisotrope Kern vom Typ ${}^2D_4$, liefert also eine quadratische Form in 8 Variablen mit Diskriminante $\Delta \neq 1$. Über $l = k(\sqrt{\Delta})$ erhalten wir G_l vom Typ ${}^1E_{6,2}^{28}$ und die Bedingung an die Hasse-Invariante folgt aus Satz IV, 6.3.1.. Daß die Diskriminante über l gleich 1 wird ist klar.
Sei nun umgekehrt eine quadratische Form mit den Bedingungen des Satzes gegeben; wir haben also eine anisotrope Gruppe A vom Typ ${}^2D_4$ mit Diagramm:



Die l - Darstellung zum dominanten Gewicht ω_4 liefert durch Restriktion eine k - Darstellung $A_k \xrightarrow{\rho} {}_kGl(V(\omega_4))$.
Über l wird diese Darstellung äquivalent zu der Darstellung:

$$A_l \xrightarrow{\rho_l} Gl(V(\omega_3) \oplus V(\omega_4))$$

durch den Isomorphismus:

$$V(\omega_4) \otimes_k l \xrightarrow{\sim} V(\omega_3) \oplus V(\omega_4)$$

(vergl. [36] § 7).
Da die Galoisgruppe gerade ω_3 und ω_4 vertauscht, überlegt man sich leicht, daß diese Äquivalenz sogar eine Γ - Äquivalenz ist.
Damit sind aber die Voraussetzungen von Satz IV, 6.2. erfüllt und wir haben gezeigt, daß G existiert.

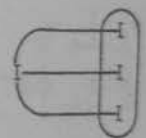
Auch Formen vom Typ ${}^2E_{6,1}^{29}$ können nicht über $\mathbb{R}$ existieren. Denn sonst müßte eine anisotrope quadratische Form auf $\mathbb{R}^8$ mit Diskriminante ungleich 1 existieren. Die beiden einzigen anisotropen Formen (bis auf Ähnlichkeit) auf $\mathbb{R}^8$ haben aber Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

also Diskriminante $(-1)^{\binom{8}{2}} = 1$.
Dagegen können wir die Existenz solcher Formen über Zahlkörpern leicht nachweisen: s. 5.2.6..

4.2. Trialitäre Formen von D_4

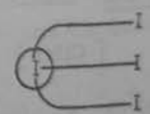
Auch bei den trialitären D_4 ist $(\Lambda/\bar{\Lambda})^{\Gamma} = \{1\}$, also kann der anisotrope Kern keine Faktoren vom Typ ${}^1A_1$ enthalten.
Das schließt den Index



sofort aus.

Es bleibt also außer der anisotropen und der quasi-zerfallenden Form nur übrig:

$$\left.\begin{matrix} {}^3D_{4,1}^{9} \\ {}^6D_{4,1}^{9} \end{matrix}\right\}$$



§ 5 Zur Existenz gewisser quadratischer Formen

Zur Sicherheit nehmen wir in diesem Paragraphen $Char(k) \neq 2$ an.

5.1. Vorbereitungen

Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und q eine quadratische Form auf V, $Cl(q)$ die Cliffordalgebra und $Cl^+(q)$ die gerade Cliffordalgebra von q. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus IV, 5.3.3. und 5.4. . Weiter benötigen wir folgende Tatsachen:

5.1.1. Es gibt ein Element $e_V \in Cl(q)$ mit $e_V^2 = d(q).1$ und den Eigenschaften: ([10] , § 9, N° 4)

Dim(V) gerade: $e_V \in Cl^+(q)$, e_V ist zentral in $Cl^+(q)$ und e_V antikommutiert mit den Elementen von $Cl^-(q)$

Dim(V) ungerade: $e_V \in Cl^-(q)$, e_V ist zentral in $Cl(q)$, $k.1+k.e_V$ ist das Zentrum von $Cl(q)$ und $Cl(q) = Cl^+(q) \otimes (k.1 + k.e_V)$.

5.1.2. Ist Dim(V) gerade, so ist $Cl(q)$ eine zentral einfache Algebra über k ([10] , § 9, N° 4, Cor. zu Th. 2)

5.1.3. Ist $V = V_1 \perp V_2$, so kann man $e_V = e_{V_1} \cdot e_{V_2}$ wählen ([10] , § 9, N° 3, Cor. 4) .

5.1.4. Ist $V = k.e$, so kann man $e_V = e$ wählen.

5.1.5. SATZ:
Ist Dim(V) gerade und Diskr(q) = 1, so ist in Br(k):

$$[\, Cl(q) \,] = [\, Cl_1^+(q) \,]$$

Beweis: Sei e ein nicht isotroper Vektor aus V und sei V_1 ein orthogonales Komplement zu $k.e$:

$$V = k.e \perp V_1$$

Sei $q(e) = a$ und $q_1 = q|_{V_1}$ (also q_1 ungerade). Dann ist

$$Cl(q) = Cl(q_1) \oplus e.Cl(q_1)$$

Mit $Cl(q_1) = Cl^+(q_1) \oplus Cl^-(q_1) = Cl^+(q_1) \oplus e_{V_1}.Cl^+(q_1)$

gilt also:

$$Cl(q) = Cl^+(q_1) \oplus e.Cl^+(q_1) \oplus e_{V_1}.Cl^+(q_1) \oplus e.e_{V_1}.Cl^+(q_1).$$

Beachten wir, daß $e_V = e.e_{V_1}$, so erhalten wir:

$$Cl(q) \xrightarrow{\sim} (k.1 \oplus k.e \oplus k.e_{V_1} \oplus k.e_V) \otimes_k Cl^+(q_1)$$

Nun kommutiert e mit $Cl^+(q_1)$, nach 5.1.1. aber auch e_{V_1}, also schließlich auch e_V. Dann ist aber

$A := k.1 \oplus k.e \oplus k.e_{V_1} \oplus k.e_V$ eine Quaternionenalgebra vom Typ $(a, d(q_1))$ und der Isomorphismus $Cl(q) \xrightarrow{\sim} A \otimes_k Cl^+(q_1)$ ist ein Isomorphismus von k-Algebren.

Nun ist $e_V^2 = e.e_{V_1}.e.e_{V_1} = -e.e.e_{V_1}.e_{V_1} = -a.d(q_1).1$
$= d(q).1 = \lambda^2.1$.

Das ist offensichtlich ein Quadrat und wir haben $a.d(q_1) = -\lambda^2$.

Damit ist die Abbildung:

$$1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -a\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{V_1} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -d(q_1) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_V \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus auf $M_2(k)$ und die Quaternionenalgebra zerfällt über k.

Andererseits hatten wir: $Cl^+(q) = Cl^+(q_1) \oplus e.Cl^-(q_1) =$
$= Cl^+(q_1) \oplus e.e_{V_1}.Cl^+(q_1) = Cl^+(q_1) \oplus e_V.Cl^+(q_1) =$
$= \frac{1}{2}(1+e_V).Cl^+(q_1) \oplus \frac{1}{2}(1-e_V).Cl^+(q_1)$.

Wir können $e_V^2 = 1$ annehmen, also sind $\frac{1}{2}(1+e_V) \neq 1$ und $\frac{1}{2}(1-e_V) \neq 1$ zentrale idempotente Elemente von $Cl^+(q)$ mit

$$\frac{1}{2}(1+e_V).\frac{1}{2}(1-e_V) = \frac{1}{2}(1-e_V).\frac{1}{2}(1+e_V) = 0.$$

Daher ist die angegebene Zerlegung ein direktes Produkt zweier einfacher

Unteralgebren, also können wir annehmen :

$$Cl_1^+(q) = \frac{1}{2}(1 + e_V) . Cl^+(q_1) .$$

Die Multiplikation mit $\frac{1}{2}(1 + e_V)$ ist aber offensichtlich ein Isomorphismus von $Cl^+(q_1)$ auf $Cl_1^+(q)$, also ist in $Br(k)$:

$$[Cl_1^+(q)] = [Cl^+(q_1)] = [Cl(q)] .$$

Bemerkung : In diesem Fall ist also $[Cl(q)]$ die Hasse-Invariante von q .

5.1.6. SATZ :

Ist $Dim(V)$ gerade und q' eine weitere beliebige quadratische Form, so ist :

$$Cl(q \oplus q') \xrightarrow{\sim} Cl(q) \otimes Cl(d(q).q')$$

Beweis : ([10] , § 9 , exerc. 2)

5.1.7. KOROLLAR :

Seien q_1 und q_2 quadratische Formen in je einer geraden Anzahl von Variablen. Es sei $Diskr(q_1) = Diskr(q_2) = 1$, dann ist :

$$[Cl_1^+(q_1 \oplus q_2)] = [Cl_1^+(q_1)] . [Cl_1^+(q_2)]$$

Beweis : $[Cl_1^+(q_1 \oplus q_2)] = [Cl(q_1 \oplus q_2)]$, Satz 5.1.5.

$= [Cl(q_1) \otimes Cl(q_2)]$, Satz 5.1.6.

$= [Cl(q_1)] . [Cl(q_2)]$

$= [Cl_1^+(q_1)] . [Cl_1^+(q_2)]$, Satz 5.1.5..

5.1.8. KOROLLAR :

Voraussetzungen wie in Korollar 5.1.7. , dann ist für alle $x \in k$:

$$[Cl_1^+(q_1 \oplus x.q_2)] = [Cl_1^+(q_1)].[Cl_1^+(q_2)]$$

Beweis : Für $x \in k$ gilt :

$Diskr(x.q_2) = d(q_2) . x^{Dim(V_2)} \mod k^{*2} = d(q_2) \mod k^{*2} = Diskr(q_2)$.

Wegen $[Cl_1^+(q_2)] = [Cl_1^+(x.q_2)]$ und Korollar 5.1.7. ist deshalb :

$$[Cl_1^+(q_1 \oplus x.q_2)] = [Cl_1^+(q_1)].[Cl_1^+(q_2)] .$$

5.1.9. SATZ :

Seien q und q' anisotrope quadratische Formen über k , sei x transzendent über k . Dann ist $q \oplus x.q'$ anisotrop über $k(x)$.

Beweis : Wäre $q + x.q'$ nicht anisotrop über $k(x)$, so würden nicht verschwindende Polynome $P_1 , \ldots\ldots , P_m$ und $Q_1 , \ldots\ldots , Q_s$ in x existieren, so daß gilt :

$$q(P_1 , \ldots\ldots , P_m) + x. q'(Q_1 , \ldots\ldots , Q_s) = 0 .$$

Wir können annehmen, daß nicht alle Polynome durch x teilbar sind. Sind nicht alle P_i durch x teilbar, so ist :

$$q(P_1(0) , \ldots\ldots , P_m(0)) = 0$$

ein Widerspruch. Also können wir setzen : $P_i = x.P_i'$ für $i = 1,\ldots,m$, und erhalten :

$$x.[q(P_1' , \ldots , P_m')] + q'(Q_1 , \ldots\ldots , Q_s) = 0 .$$

Aber dann ist

$$q'(Q_1(0) , \ldots\ldots , Q_s(0)) = 0$$

ein Widerspruch.

5.1.10. KOROLLAR :

Ist q anisotrop über k und ist x transzendent über k , so ist q auch anisotrop über $k(x)$.

5.1.11. KOROLLAR :

Ist D eine Quaternionenalgebra, die eine Divisionsalgebra ist, und ist x transzendent über k, so ist auch $D \otimes_k k(x)$ eine Divisionsalgebra.

Beweis : D ist eine Divisionsalgebra genau dann, wenn die Normform von D anisotrop ist. Damit folgt die Behauptung aus dem vorigen Korollar.

5.1.12. Bemerkung : Ist V zweidimensional und ist $\{e, f\}$ eine Orthogonalbasis von V für q, so ist $Cl(q)$ die Quaternionenalgebra vom Typ $(q(e), q(f))$ ([10], Chap. 9, Ex. 6).

5.1.13. SATZ :

Die Hasse-Invariante der Normform einer Quaternionenalgebra ist die Quaternionenalgebra selbst. Die Normform hat Diskriminante 1.

Beweis : Sei $q = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$ die Normform der Quaternionenalgebra D. Offensichtlich ist $d(q) = (-\alpha)(-\beta).\alpha\beta$ ein Quadrat. Sei

$$q_1 := x_0^2 + \alpha\beta x_3^2$$

$$q_2 := -\alpha x_1^2 - \beta x_2^2 \quad , \text{ dann ist :}$$

$$Cl(q) = Cl(q_1 \oplus q_2) \simeq Cl(q_1) \otimes Cl(d(q_1).q_2)$$

nach Korollar 5.1.6.

Nach Bemerkung 5.1.12. ist $Cl(q_1)$ eine Quaternionenalgebra vom Typ $(1, \alpha\beta)$, also zerfällt $Cl(q_1)$ über k, da 1 ein Quadrat ist (wie im Beweis von Satz 5.1.5.). Wir haben also :

$$Cl(q) \simeq M_2(k) \otimes Cl(d(q_1).q_2) = M_2(k) \otimes Cl((-\alpha\beta).q_2)$$

Benutzen wir die folgende Bezeichnung : $(\lambda) : x \longmapsto \lambda.x^2$, so haben wir : $Cl(q) \simeq M_2(k) \otimes Cl((\beta) \oplus (\alpha)) = M_2(k) \otimes D$ nach Bemerkung 5.1.12.

Also gilt in $Br(k)$:

$$[Cl(q)] = [Cl_1^+(q)] = [M_2(k)].[D] = [D].$$

5.1.14. SATZ :

Seien D_i Quaternionenalgebren vom Typ (α_i, β_i) für $i = 1, 2$, dann ist $D_1 \otimes D_2$ genau dann ein Schiefkörper, wenn die quadratische Form :

$$(-q_1)^\circ \oplus q_2^\circ = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_2^2 - \alpha_1\beta_1 x_3^2 - \alpha_2 y_1^2 - \beta_2 y_2^2 + \alpha_2\beta_2 y_3^2$$

anisotrop über k ist.

(Dabei ist q_i° die Normform von D_i eingeschränkt auf die "reinen Quaternionen" (s. [9], § 11, exerc. 6).)

Beweis : [9], § 12, exerc. 13.

5.2. Konstruktion

Wir betrachten die Standardbasis $\{1, \upsilon, \iota, \kappa\}$ einer Quaternionenalgebra D vom Typ (α, β) über k, die Divisionsalgebra ist, d.h. also : $\upsilon^2 = \alpha.1$, $\iota^2 = \beta.1$ und $\kappa^2 = -\alpha\beta.1$. Es ist $L := k.1 + k.\upsilon$ eine maximale kommutative Unteralgebra, also zerfällt D über L. Dann können wir D als verschränktes Produkt (L, β) beschreiben (siehe : [2], Ch. VIII, 4., p. 82f.) und für D' vom Typ (α, β'), also $D' \simeq (L, \beta')$, gilt in $Br(k)$:

$$[D] = [D'] \Leftrightarrow [(L, \beta)] = [(L, \beta')] \Leftrightarrow \beta' \in \beta.N_{L/k}(L^*)$$

([2], Theorem 8.4.F)

Seien nun D_1 und D_2 Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$ vom Typ $(-1, -1)$ und $(-1, -3)$. Ihre Normformen

$$q_1 := x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

$$q_2 := x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

sind positiv definit, also sind q_1, q_2 und damit $q := q_1 \oplus q_2$ anisotrop, haben Diskriminante 1, also sind die D_1 Divisionsalgebren. Nach Korollar 5.1.7. und Satz 5.1.13. gilt also :

$$[\, Cl_1^+(q)\,] = [\, Cl_1^+(q_1)\,].[\, Cl_1^+(q_2)\,]$$
$$= [\, D_1\,].[\, D_2\,]$$
$$= [\, D_1 \otimes D_2\,]$$

Nach unseren obigen Bemerkungen ist $[\, D_1 \otimes D_2\,] = 1$ genau dann, wenn $3 \in N_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(i)^*)$.

Nun ist aber $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$, also $3 \notin N_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(i)^*)$,

also ist $[\, D_1 \otimes D_2\,] = [\, Cl_1^+(q)\,] \neq 1$.

Die quadratische Form

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$$

ist nicht anisotrop, also ist nach Satz 5.1.14. $D_1 \otimes D_2$ keine Divisionsalgebra. Daher muß die 16-dimensionale Algebra $D_1 \otimes D_2$ vom Typ $M_2(D)$ sein, wobei D eine Quaternionenalgebra ist. Es gilt also $[\, Cl_1^+(q)\,] = [\, D\,]$ und wir haben gesehen :

5.2.1. <u>Es gibt anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante 1, deren Hasse-Invariante eine Quaternionenalgebra ist.</u>

Nehmen wir nun q und D wie in 5.2.1., sei q' die Normform von D und sei x transzendent über $\mathbb{Q}$, dann sind q und q' anisotrop, also ist $q \oplus x.q'$ anisotrop über $\mathbb{Q}(x)$ (Satz 5.1.9.) hat Diskriminante 1 und nach Korollar 5.1.11. Hasse-Invariante $[\, D \otimes \mathbb{Q}(x)\,].[\, D \otimes \mathbb{Q}(x)\,] = 1$, also sehen wir :

5.2.2. <u>Es gibt anisotrope quadratische Formen in 12 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1.</u>

Seien nun D_1 und D_2 Quaternionenalgebren über k, so daß $D_1 \otimes D_2$ eine Divisionsalgebra ist. (Wählt man etwa x_1, x_2, y_1, y_2 algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$, so leisten $k = \mathbb{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ und D_i vom Typ (x_i, y_i) das Verlangte.)
Seien q_1 und q_2 die Normformen von D_1 und D_2, q_1° und q_2° die Einschränkungen auf die reinen Quaternionen und sei $q^\circ := q_1^\circ \oplus (-q_2^\circ)$, dann besagt Satz 5.1.14. :

$$D_1 \otimes D_2 \text{ ist Divisionsalgebra} \Leftrightarrow q^\circ \text{ ist anisotrop}.$$

Die Form $q_0 := x^2 - y^2$ hat Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1, wie man mit Bem. 5.1.12. leicht nachprüft. Dann folgt aber aus Korollar 5.1.7. :

$$[\, Cl_1^+(q_0 \oplus q^\circ)\,] = [\, Cl_1^+(q_0)\,].[\, Cl_1^+(d(q_0).q^\circ)\,]$$
$$= [\, Cl_1^+(d(q_0).q^\circ)\,]$$
$$= [\, Cl_1^+(q^\circ)\,].$$

Andererseits haben wir :

$$q_0 \oplus q^\circ = (x^2 \oplus q_1^\circ) \oplus ((-y^2) \oplus (-q_2^\circ)) = q_1 \oplus (-q_2)$$

Daraus folgt mit Korollar 5.1.8. und Satz 5.1.13. :

$$[\, Cl_1^+(q^\circ)\,] = [\, Cl_1^+(q_0 \oplus q^\circ)\,]$$
$$= [\, Cl_1^+(q_1 \oplus (-q_2))\,]$$
$$= [\, Cl_1^+(q_1)\,].[\, Cl_1^+(q_2)\,]$$
$$= [\, D_1\,].[\, D_2\,]$$
$$= [\, D_1 \otimes D_2\,]$$

Es gilt $\det(q_i^\circ) \equiv 1 \bmod (k^{*2})$, $i = 1,2$, also:
$\det(q_1^\circ \oplus (-q_2^\circ)) \equiv -1 \bmod (k^{*2})$. Dann folgt :

$$d(q_1^\circ \oplus (-q_2^\circ)) = (-1)^{\frac{6.5}{2}}. \det(q_1^\circ \oplus (-q_2^\circ)) =$$
$$= (-1).\det(q_1^\circ \oplus (-q_2^\circ)) \equiv 1 \bmod (k^{*2}).$$

Wir haben also bewiesen :

5.2.3. Ist $D_1 \otimes D_2$ eine Divisionsalgebra, so ist q^* eine anisotrope quadratische Form mit Diskriminante 1 und Hasse--Invariante $D_1 \otimes D_2$.

Seien nun z_1 und z_2 algebraisch unabhängig über k, dann sind nach Satz 5.1.9.

$$q' := q \oplus z_1 . q_1 \quad \text{und}$$

$$q'' := q \oplus z_1 . q_1 \oplus z_2 . q_2$$

anisotrope quadratische Formen über $k(z_1)$ bzw. $k(z_1, z_2)$ in 10 bzw. 14 Variablen mit Diskriminante 1.

Wegen 5.1.8. und 5.2.3. ist :

$$[\,Cl_1^+(q')\,] = [\,D_1 \otimes k(z_1)\,].[\,D_2 \otimes k(z_1)\,].[\,D_1 \otimes k(z_1)\,]$$
$$= [\,D_2 \otimes k(z_1)\,]$$

eine Quaternionenalgebra und :

$$[\,Cl_1^+(q'')\,] = [\,Cl_1^+(q')\,].[\,Cl_1^+(q_2)\,]$$
$$= [\,D_2 \otimes k(z_1, z_2)\,].[\,D_2 \otimes k(z_1, z_2)\,] = 1 .$$

Also gilt :

5.2.4. Es gibt anisotrope quadratische Formen in 10 Variablen mit Diskriminante 1, deren Hasse-Invariante eine Quaternionenalgebra ist.

5.2.5. Es gibt anisotrope quadratische Formen in 14 Variablen mit Diskriminante 1 und Hasse-Invariante 1.

5.2.6. SATZ: Es gibt anisotrope quadratische Formen in 8 Variablen mit Diskriminante ungleich 1, so daß über einer quadratischen Erweiterung Diskriminante und Hasse-Invariante 1 werden.

Beweis : Sei $k = \mathbb{Q}$, q die quadratische Form mit Matrix :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & p \end{pmatrix}$$

wobei p irgendeine Primzahl ist. Dann ist Diskriminante $(q) = (-1)^{\binom{8}{2}} . p = p \neq 1$.

Über $l = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ wird q äquivalent zu q' mit Matrix :

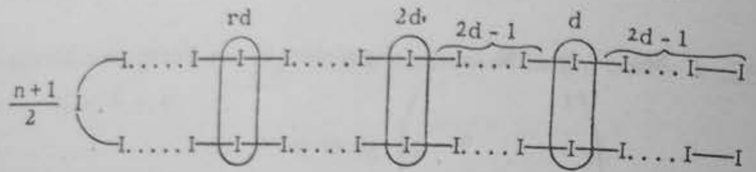
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Mit 5.1.6. und 5.1.12. sieht man nun aber leicht, daß in $Br(l)$: $[\,Cl(q')\,] = [\,D\,].[\,D\,]$, wobei D die Quaternionenalgebra vom Typ $(-1, -1)$ über l ist, also $[\,Cl(q')\,] = 1$.

§ 6 Zur Existenz gewisser hermitescher Formen über Divisionsalgebren

6.1. Sei k ein Körper, l eine quadratische Erweiterung, D eine zentraleinfache Divisionsalgebra vom Grad d über l mit Involution zweiter Art σ, so daß $k = \{ x \in l \mid x^\sigma = x \}$.
Über algebraischen Zahlkörpern sind solche Divisionsalgebren automatisch zyklisch. Ferner gibt es zu vorgegebenem d stets Zahlkörper, über denen eine Divisionsalgebra D mit den angeführten Eigenschaften existiert.

6.2. Sei h eine nicht entartete hermitesche Form bezüglich σ in m Variablen über D, dann bezeichnen wir die spezielle unitäre Gruppe bezüglich h mit ${}_k SU_m(D, h)$ oder $SU_m(D, h)$. $SU_m(D, h)$ ist eine k - Gruppe vom Typ ${}^2A_n$ mit $n = m.d - 1$. Ist n ungerade und hat h Index r, so sieht ihr Diagramm folgendermaßen aus (vergl. [32], Table II) :



Wir interessieren uns für die Algebra $\beta(\overline{\omega_{\frac{n+1}{2}}})$.

6.3. SATZ: Sei $SU_m(D, h)$ wie oben, dann ist $\beta(\overline{\omega_{\frac{n+1}{2}}})$ die Klasse der folgenden Quaternionenalgebra

$$(1/k \, , \, (-1)^{\frac{m.d^2}{2}} . |h|)$$

wobei $|h|$ die reduzierte Norm der Matrix von h in $M_m(D)$ ist.

Beweis : Siehe [41], III, 3.1. - 2. . Zur Bezeichnung (1/k , a) siehe 5.2. .

6.4. SATZ: Es gibt nicht entartete hermitesche Formen in 1 Variablen mit Index 0 über Divisionsalgebren vom Grad 6 mit Involution zweiter Art, so daß $\beta(\overline{\omega_3}) = 1$.

Beweis : Wir wählen einen algebraischen Zahlkörper k und eine quadratische Erweiterung l, so daß eine Divisionsalgebra D mit den geforderten Eigenschaften über l existiert. Bezeichnen wir die Involution mit σ, so leistet die hermitesche Form $x.x'^{\sigma}$ offensichtlich das Verlangte und nach Satz 6.3. ist :

$$\beta(\overline{\omega_3}) = [(1/k \, , (-1)^{\frac{1.6^2}{2}} . 1)] = [(1/k \, , 1)] = 1 .$$

6.5. SATZ: Es gibt nicht entartete hermitesche Formen in 6 Variablen über einer quadratischen Erweiterung l/k mit Index 1 und $\beta(\overline{\omega_3}) = 1$.

Beweis : Wir zeigen die Existenz über $\mathbb{R}$ (mit $(l, k) = (\mathbb{C}, \mathbb{R})$) und über Zahlkörpern (mit $(l, k) = (\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q})$).

Die hermitesche Form

$$\sum_{i=1}^{5} x_i . \overline{x_i'} - x_6 . \overline{x_6'}$$

ist offensichtlich nicht entartet und hat Index 1. Es ist $|h| = -1$, $m = 6$, $d = 1$, also :

$$\beta(\overline{\omega_3}) = [(1/k \, , (-1)^{\frac{6.1^2}{2}} . (-1))] = [(1/k, 1)] = 1 .$$

6.6. SATZ: Es gibt nicht entartete hermitesche Formen in 2 Variablen mit Index 1 über Divisionsalgebren vom Grad 3 mit Involution zweiter Art, so daß $\beta(\overline{\omega_3}) = 1$.

Beweis : Sei k ein Zahlkörper, so daß D mit den geforderten Eigenschaften existiert. Bezeichnen wir die Involution wieder mit σ, so ist die Form $x.x'^{\sigma} - y.y'^{\sigma}$ offensichtlich nicht entartet, hat Index 1 und wie oben ist :

$$\beta(\overline{\omega_3}) = [(1/k \, , (-1)^{\frac{2.3^2}{2}} . (-1))] = [(1/k, 1)] = 1 .$$

§ 7 Schlußbemerkung

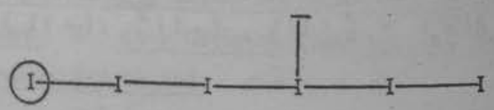
Wir wollen noch die Formen der Ausnahmegruppen zusammenstellen, die wir im Voraufgegangenen nicht behandelt haben. Wollten wir hier Klassifikation und Existenzbeweise ausführen, so müßten Methoden entwickelt werden, die aus dem Rahmen dieser Arbeit herausfallen und umfangreiche Vorbereitungen benötigen würden. Da andererseits diese Ergebnisse in der Literatur nirgends explizit zu finden sind, wollen wir wenigstens die bekannten Resultate angeben.

7.1. Die trialitären Formen von D_4, von denen wir die möglichen Indizes in 4.2. angegeben haben, existieren alle über Zahlkörpern. Der Beweis dieser Tatsache kann im Rahmen der lokalen Theorie (s. [18]) ziemlich leicht geführt werden.

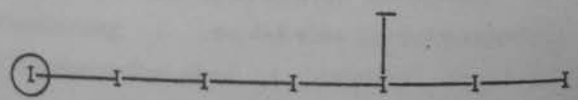
7.2. Für die anisotropen inneren Formen von E_6 gilt Entsprechendes.

7.3. Es bleiben die Formen mit einer E_6 (bzw. E_7) als anisotropem Kern, der triviale Brauerinvariante besitzt :

$E^{78}_{7,1}$



$E^{133}_{8,1}$



$E^{78}_{8,2}$

Hier geben wir die Klassifikation ohne Beweis an und verzichten ganz auf eine Untersuchung von Existenzfragen :

Die anisotropen inneren Formen von E_6 mit trivialer Brauerinvariante werden klassifiziert durch die Normformen (bis auf Faktor) einer Ausnahme-Jordanalgebra, die die Null nicht darstellen.

Die k - anisotropen Formen von E_7 mit trivialer Brauerinvariante werden klassifiziert durch anisotrope binäre hermitesche Formen in einer Ausnahme-Jordanalgebra mit Involution zweiter Art über einer quadratischen Erweiterung l/k .

ANHANG

I Reduktion auf den einfach zusammenhängenden absolut einfachen Fall

1.) Reduktion auf den einfach zusammenhängenden Fall

Wir betrachten eine halbeinfache einfach zusammenhängende k-Gruppe $\tilde{G}$, eine K-Gruppe G mit zentraler K-Isogenie $\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$. Dann fragen wir: Wann gibt es eine k-Gruppe G' und einen K-Isomorphismus $f : G \longrightarrow G'$, so daß $f \circ \pi$ eine zentrale k-Isogenie ist?

Die Antwort und die angekündigte Reduktion liefert der

SATZ:

G' existiert $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\pi)$ ist Γ-stabil

Beweis: Sei $C' = \mathrm{Ker}(\pi)$, dann haben wir die folgende exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow C' \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

"$\Longrightarrow$"

Sei $f : G \longrightarrow G'$ ein K-Isomorphismus, so daß $f \circ \pi$ eine zentrale k-Isogenie ist. Dann gilt für alle $x \in C'$ und $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \pi(\gamma(x)) = 1 &\Leftrightarrow f^{-1} \circ {}^{\gamma}f \circ {}^{\gamma}\pi(\gamma(x)) = 1, \quad \text{da } f \circ \pi / k \\ &\Leftrightarrow {}^{\gamma}f \circ {}^{\gamma}\pi(\gamma(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma(f \circ \pi(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow f \circ \pi(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \pi(x) = 1 \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$"

Sei G^* eine k-zerfallende Gruppe, die über K isomorph zu G wird, sei $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G^*$ ein Isomorphismus und $\pi^* = \varphi \circ \pi$ die entsprechende zentrale Isogenie.

Nach Voraussetzung über C' ist für alle $\gamma \in \Gamma$ durch die folgende Gleichung eindeutig ein K-Automorphismus ξ_γ von G^* bestimmt:

$$\xi_\gamma \circ {}^{\gamma}\pi^* = \pi^*$$

Eine einfache Rechnung bestätigt nun:

$$\xi_{\gamma\delta} \circ {}^{\gamma\delta}\pi^* = \xi_\gamma \circ {}^{\gamma}\xi_\delta \circ {}^{\gamma\delta}\pi^* \qquad , \gamma, \delta \in \Gamma$$

also: $\xi_{\gamma\delta} = \xi_\gamma \circ {}^{\gamma}\xi_\delta$, d.h. $\{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in Z^1(k, \mathrm{Aut}_K(G^*))$.

Dann leisten aber $G' = {}_{\xi}G^*$, ein K-Isomorphismus $f_1 : G^* \xrightarrow{\sim} G'$, der ξ definiert und $\pi' = f_1 \circ \pi^*$ das Verlangte.

Bemerkungen:

i) In der Sprache der Schemata wird der Beweis trivial, weil C' dann abgeschlossener Normalteiler ist und man G' als $\tilde{G}/C'$ erhält.

ii) Der Satz läßt sich in eine bequeme Bedingung an den Index von G' umformulieren:

Ist T ein maximaler Torus von G, so bezeichnen wir wie in [32], 1.5. und 3.1.

$$C(G) := \overline{X_*}/X_*(T).$$

Dann induziert die Isogenie $\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$ einen Homomorphismus

$$\pi' : C(\tilde{G}) = \overline{X_*}/\tilde{X}_* \longrightarrow C(G)$$

und der Kern von π' ist $C'(G) = X_*(T)/\tilde{X}_*$.

Ist $C^*(G)$ die zu $C(G)$ duale Gruppe, so ist $Z(G)$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(C^*(G), \bar{k}^*)$, also, falls $\mathrm{Char}(k) = p$, ist :

$$Z(G) \xrightarrow{\sim} C(G)/_{\text{p-primäre Komponente}}$$

Da die natürliche und die $*$-Operation von Γ auf dem Zentrum übereinstimmen, erhalten wir mit der von $*$ induzierten Operation von Γ auf $C(\widetilde{G})$:

$$C' \text{ ist } \Gamma\text{-stabil} \Leftrightarrow C'(G) \text{ ist } \Gamma\text{-stabil}$$

Eine Tabelle der Operationen auf $C(\widetilde{G})$ in den fast einfachen Fällen findet man in Anhang II (und natürlich in [11]).

iii) Man entnimmt den Tabellen sofort, daß die Klassifikation der Formen orthogonaler Gruppen äquivalent mit der Klassifikation ihrer einfach zusammenhängenden Überlagerungen ist :
Es ist $C'(SO_{4n}) \xrightarrow{\sim} \langle z, z' \rangle$ und $C'(SO_{4n+2}) \xrightarrow{\sim} \langle z^2 \rangle$.

iv) Eine unmittelbare Folgerung des Satzes ist, daß die Klassifikation der einfach zusammenhängenden und der adjungierten Gruppen äquivalent ist.

2.) Reduktion auf den absolut einfachen Fall ([22]; [32], 3.1.2.)

SATZ : ([22], S. 202)
Jede einfach zusammenhängende halbeinfache k-Gruppe ist Produkt k-fast einfacher einfach zusammenhängender Gruppen.

SATZ : ([22])
Jede k-fast einfache einfach zusammenhängende Gruppe G entsteht aus einer fast einfachen einfach zusammenhängenden Gruppe G_1 über einem Oberkörper L von k durch Restriktion, also $G \xrightarrow{\sim} R_{L/k}(G_1)$.

Damit folgt aus dem Lemma von Shapiro ([27], I-12, Prop. 10) die angekündigte Reduktion :

$$H^1(k, \mathrm{Aut}_K(G)) \xrightarrow{\sim} H^1(L, \mathrm{Aut}_K(G_1))$$

Aus den Eigenschaften des Restriktionsfunktors liest man unmittelbar ab, wie man den k-Index von G aus dem L-Index von G_1 gewinnt : ([32], 3.1.2.)
Sei $\Gamma' = \mathrm{Gal}(K/L)$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ und $\mathcal{D}$ das Dynkin Diagramm von G_1. Dann besteht das Dynkin Diagramm $\mathcal{E}$ von G aus $[L/k]$ Kopien von $\mathcal{D}$, Γ operiert auf diesen Kopien wie auf Γ/Γ' (Permutation der Konjugierten) und die Einschränkung der Operation auf eine Kopie von $\mathcal{D}$ stimmt mit der $*$-Operation von Γ' auf $\mathcal{D}$ überein.
Ist H_1 der L-anisotrope Kern von G_1, so erhält man den k-anisotropen Kern von G als $G_0 = R_{L/k}(H_1)$ (s. [7], 6.19.).

II Tabellen

1.) Dynkin Diagramme

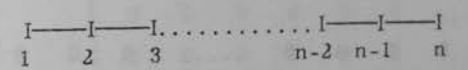
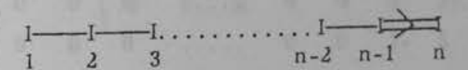
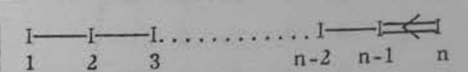
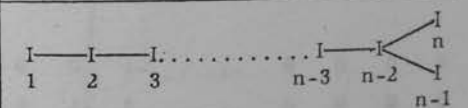
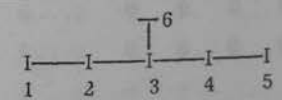
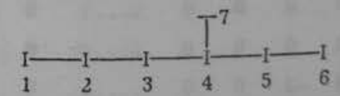
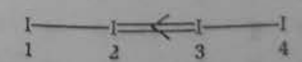
2.) Inversion der Matrizen $M(\Delta)$

3.) Indizes und relative Wurzelsysteme

4.) Operationen auf dem Zentrum

DYNKIN DIAGRAMME

Erläuterungen : Die Numerierung der Diagramme stimmt mit [32], Table I überein, jedoch nicht mit [11] . Zur Referenz für Kapitel III geben wir in der rechten Kolonne die Koeffizienten der Linearkombination der größten Wurzel entsprechend dem nebenstehenden Diagramm an.

Typ	Dynkin Diagramm	Größte Wurzel
A_n		111...........111
B_n		122...........222
C_n		222...........221
D_n		$122\ldots\ldots22{1 \atop 1}$
E_6		$\overset{2}{12321}$
E_7		$\overset{2}{123432}$
E_8		$\overset{3}{2345642}$
F_4		2 4 3 2
G_2		3 2

INVERSION DER MATRIZEN $M(\Delta)$

Sei $\Delta = \{\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ ein System einfacher Wurzeln des irreduziblen Wurzelsystems Σ vom Typ X_y. Dann bezeichnen wir mit $M(\Delta)$ oder $M(X_y)$ die Matrix der Skalarprodukte (α_i, α_j), $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$ für ein zulässiges Skalarprodukt, wobei wir der Numerierung von Anhang 1 folgen. Wir geben die $M(\Delta)$ und ihre Inversen für alle irreduziblen Wurzelsysteme an.

$$M(A_n) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(B_n) \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(D_n) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(E_6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(E_7) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(E_8) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(G_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(A_n)^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & 2(n-3) & \cdots & 6 & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & 3(n-3) & \cdots & 9 & 6 & 3 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & 4(n-3) & \cdots & 12 & 8 & 4 \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \cdots & 3(n-2) & 2(n-2) & n-2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Also :

$$(M(A_n)^{-1})_{i,j} = \frac{1}{n+1} \cdot \begin{cases} j\,(n-i+1) & \text{falls } i \geq j \\ i\,(n-j+1) & \text{falls } i \leq j \end{cases}$$

$$M(B_n)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Also :

$$(M(B_n)^{-1})_{i,j} = \frac{1}{2} \min\{i, j\}$$

$$M(C_n)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}
4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 2 \\
4 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 8 & 8 & 4 \\
4 & 8 & 12 & \cdots & 12 & 12 & 12 & 6 \\
4 & 8 & 12 & \cdots & 16 & 16 & 16 & 8 \\
\cdots & & & & & & & \\
4 & 8 & 12 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-3) & 4(n-3) & 2(n-3) \\
4 & 8 & 12 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-2) & 4(n-2) & 2(n-2) \\
4 & 8 & 12 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-2) & 4(n-1) & 2(n-1) \\
2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-3) & 2(n-2) & 2(n-1) & n
\end{pmatrix}$$

Also :

$$(M(C_n)^{-1})_{i,j} = \begin{cases} \min[\, i,\, j\,] & \text{falls } i < n \text{ und } j < n \\ \frac{1}{2}\min[\, i,\, j\,] & \text{falls } i = n \text{ und } j < n \text{ oder} \\ & \text{falls } j = n \text{ und } i < n \\ \frac{n}{4} & \text{falls } i = j = n \end{cases}$$

$$M(D_n)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}
4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 & 2 \\
4 & 8 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 8 & 4 & 4 \\
4 & 8 & 12 & 12 & \cdots & 12 & 12 & 6 & 6 \\
4 & 8 & 12 & 16 & \cdots & 16 & 16 & 8 & 8 \\
\cdots & & & & & & & & \\
4 & 8 & 12 & 16 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-3) & 2(n-3) & 2(n-3) \\
4 & 8 & 12 & 16 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-2) & 2(n-2) & 2(n-2) \\
2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-3) & 2(n-2) & n & n-2 \\
2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-3) & 2(n-2) & n-2 & n
\end{pmatrix}$$

Also:

$$(M(D_n)^{-1})_{i,j} = \begin{cases} \min[\, i,\, j\,] & \text{falls } i,\, j \le n-2 \\ \frac{1}{2}\min[\, i,\, j\,] & \text{falls } i \ge n-1 \text{ und } j \le n-2 \text{ oder} \\ & \text{falls } j \ge n-1 \text{ und } i \le n-2 \\ \frac{n}{4} & \text{falls } i = j \in \{\, n,\, n-1\,\} \\ \frac{n-2}{4} & \text{falls } i = n-1 \text{ und } j = n \text{ oder} \\ & \text{falls } j = n-1 \text{ und } i = n \end{cases}$$

$$M(E_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}
4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\
5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\
6 & 12 & 18 & 12 & 6 & 9 \\
4 & 8 & 12 & 10 & 5 & 6 \\
2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\
3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 6
\end{pmatrix}$$

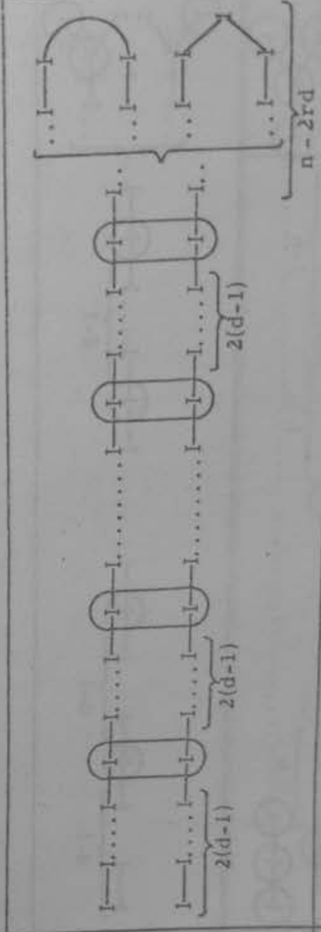
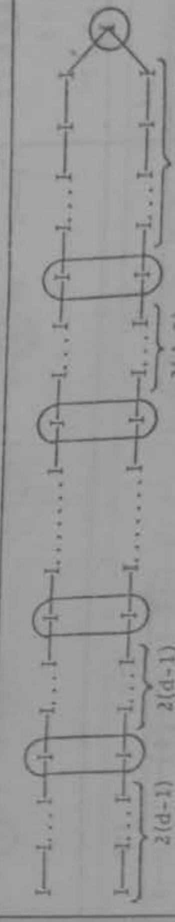
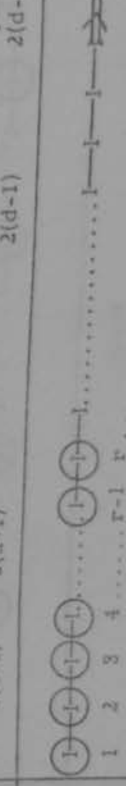
$$M(E_7)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

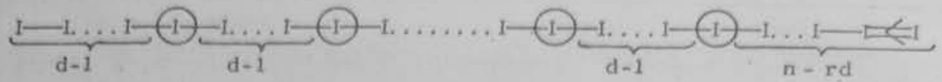
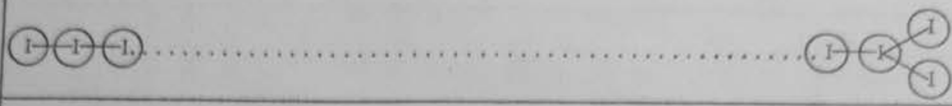
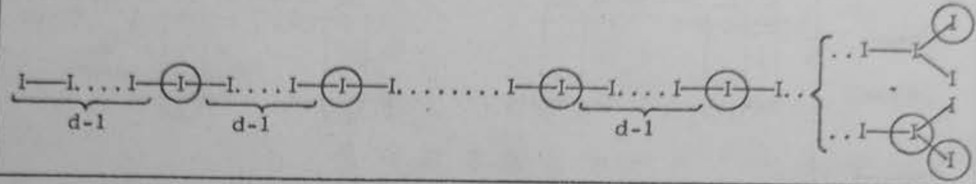
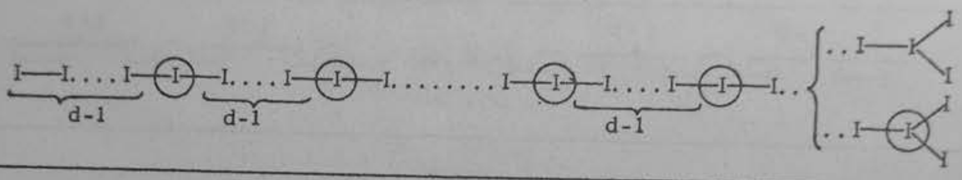
$$M(E_8)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

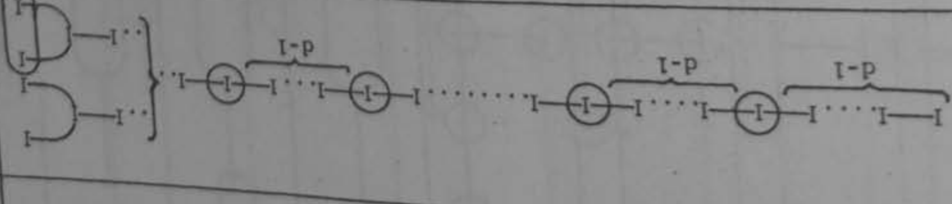
$$M(F_4)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(G_2)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

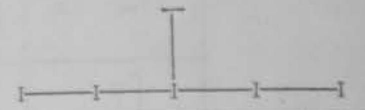
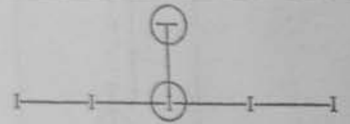
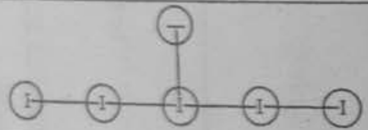
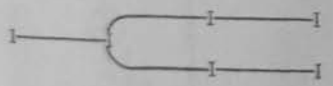
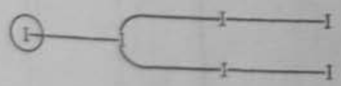
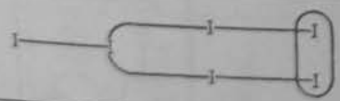
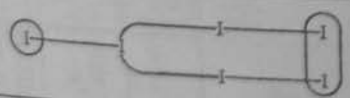
INDIZES UND RELATIVE WURZELSYSTEME DER KLASSISCHEN GRUPPEN

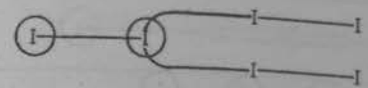
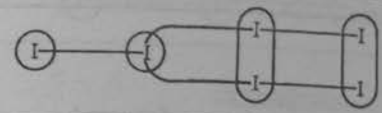
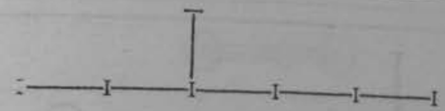
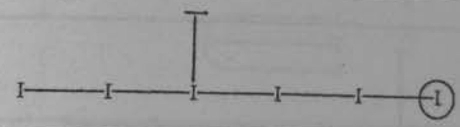
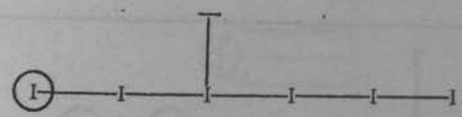
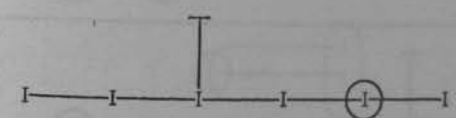
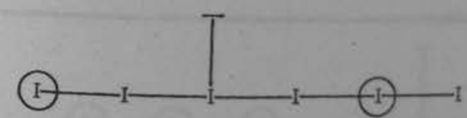
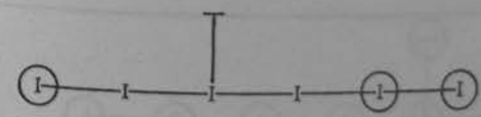
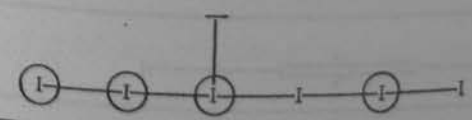
Bezeichnung	Bedingungen	Index	Typ d. rel. W. systems
${}^1A^{(d)}_{n,r}$	$d(r+1)=n+1$ $d \geq 1$		A_r
${}^2A^{(d)}_{n,r}$	$d \mid n+1; d \geq 1$ $2rd \leq n+1$ Fall 1: $2rd < n+1$		BC_r
	Fall 2: $2rd = n+1$		C_r
$B_{n,r}$	—		B_r

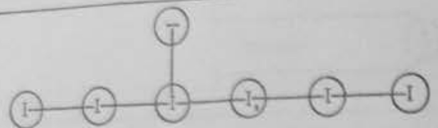
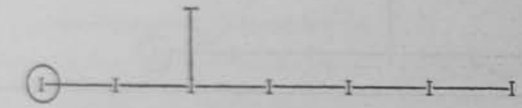
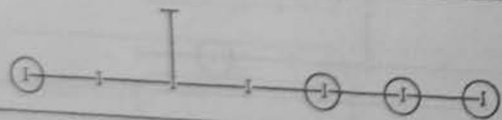
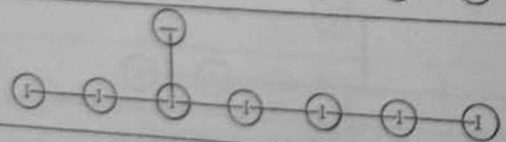
Bezeich-nung	Bedingungen	Index	Typ d. rel. W. systems
$C_{s,r}$	$d=2^a \mid 2n$ $d \geq 1$ $d=1 \Rightarrow n=r$		C_r falls ~~d=1~~ $n=r.d$ BC_r ~~falls d<1~~ sonst
${}^1D^{(d)}_{s,r}$	$d = 2^a \mid 2n$ $d \geq 1$; $rd \leq n$ $n \neq rd+1$ Fall 1 : $d=1$; $n=r$		D_s
	Fall 2 : $n = rd$; $d \geq 2$		C_r
	Fall 3 : $n - rd \geq 2$		B_r falls $d=1$ BC_r falls $d>1$

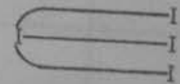
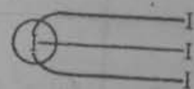
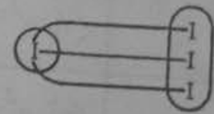
Bezeich-nung	Bedingungen	Index	Typ d. rel. W. systems
${}^2D^{(d)}_{s,r}$	$d = 2^a \mid 2n$ $d \geq 1$ $rd \leq n-1$		B_r falls $d=1$ BC_r falls $d>1$

INDIZES UND RELATIVE WURZELSYSTEME DER AUSNAHMEGRUPPEN

Bezeichnung	Index	Typ d. rel. W. systems
${}^1E^{78}_{6,0}$		—
${}^1E^{28}_{6,2}$		A_2
${}^1E^{16}_{6,2}$		G_2
${}^1E^{0}_{6,6}$		E_6
${}^2E^{78}_{6,0}$		—
${}^2E^{35}_{6,1}$		BC_1
${}^2E^{29}_{6,1}$		BC_1
${}^2E^{16'}_{6,2}$		BC_2

Bezeichnung	Index	Typ d. rel. W. systems
${}^2E^{16''}_{6,2}$		G_2
${}^2E^{2}_{6,4}$		F_4
$E^{133}_{7,0}$		—
$E^{78}_{7,1}$		A_1
$E^{66}_{7,1}$		BC_1
$E^{48}_{7,1}$		BC_1
$E^{31}_{7,2}$		BC_2
$E^{28}_{7,3}$		C_3
$E^{9}_{7,4}$		F_4

Bezeich-nung	Index	Typ d. rel. W. systems
$E^{0}_{7,7}$		E_7
$E^{248}_{8,0}$		—
$E^{133}_{8,1}$		BC_1
$E^{91}_{8,1}$		BC_1
$E^{78}_{8,2}$		G_2
$E^{66}_{8,2}$		BC_2
$E^{28}_{8,4}$		F_4
$E^{0}_{8,8}$		E_8
$F^{52}_{4,0}$		—

Bezeich-nung	Index	Typ d. rel. W. systems
$F^{21}_{4,1}$		BC_1
$F^{0}_{4,4}$		F_4
$G^{14}_{2,0}$		—
$G^{0}_{2,2}$		G_2
${}^3D^{28}_{4,0}$ und ${}^6D^{28}_{4,0}$		—
${}^3D^{9}_{4,1}$ und ${}^6D^{9}_{4,1}$		BC_1
${}^3D^{2}_{4,2}$ und ${}^6D^{2}_{4,2}$		G_2

OPERATIONEN AUF DEM ZENTRUM

Sei Σ ein irreduzibles reduziertes Wurzelsystem; dann bezeichnen wir das Gewichtgitter von Σ mit $P(\Sigma)$, das Wurzelgitter mit $Q(\Sigma)$, die Automorphismengruppe mit $A(\Sigma)$ und die Weylsche Gruppe mit $W(\Sigma)$.

Typ von Σ	$C = P(\Sigma)/Q(\Sigma)$	$\mathrm{Sym} = A(\Sigma)/W(\Sigma)$	Operation von Sym auf C
A_1	$\langle z \mid z^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	$\{1\}$	—
A_n $n>1$	$\langle z \mid z^{n+1} = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_{n+1}$	$\langle a \mid a^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	a invertiert die Elemente von C
B_n	$\langle z \mid z^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	$\{1\}$	—
C_n	$\langle z \mid z^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	$\{1\}$	—
D_4	$\langle z, z' \mid z^2 = z'^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathfrak{S}_3$	Sym permutiert $\{ z, z', z.z' \}$
D_{2n} $n \mid 2$	$\langle z, z' \mid z^2 = z'^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle a \mid a^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	a vertauscht z und z' also: $a(z.z') = z.z'$
D_{2n+1}	$\langle z \mid z^4 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_4$	$\langle a \mid a^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	a invertiert die Elemente von C
E_6	$\langle z \mid z^3 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$	$\langle a \mid a^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	a invertiert die Elemente von C
E_7	$\langle z \mid z^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$	$\{1\}$	—

LITERATUR

[1] A. A. Albert — Structure of Algebras, A. M. S. Colloquium Publ., vol. 24, New York 1939

[2] E. Artin, C. Nesbitt, R. M. Thrall — Rings with minimum condition, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1948

[3] A. Babakhanian — Cohomological Methods in Group Theory, Marcel Dekker, New York, 1972

[4] A. Borel — Linear Algebraic Groups, Notes taken by H. Bass, W. A. Benjamin, New York 1969

[5] A. Borel — Linear Algebraic Groups, Proc. Symposia Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1966, p. 3-19

[6] A. Borel — Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, 1969

[7] A. Borel et J. Tits — Groupes réductifs, Publ. Math. I. H. E. S. 27, 1965, p. 55-151

[8] A. Borel et J. Tits — Compléments à l'article "Groupes réductifs", Publ. Math. I. H. E. S. 41, 1972, p. 253-276

[9] N. Bourbaki — Algèbre, chap. VIII, Modules et anneaux semi-simples, Hermann, Paris, 1958

[10] N. Bourbaki — Algèbre, chap. IX, Formes sequilinéaires et formes quadratiques, Hermann, Paris, 1959

[11] N. Bourbaki — Groupes et algèbres de Lie, chap. IV, V et VI, Actu. Sci. Ind. 1337, Paris, 1968

[12] F. Bruhat et J. Tits — Groupes algébriques simples sur un corps local, Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen 1966), Springer 1967, p. 23 - 36

[13] P. Cartier — Groupes algébriques et groupes formels, Coll. Théor. Gr. Alg., C. B. R. M., Bruxelles 1962, p. 87 - 111

[14] C. Chevalley — The Algebraic Theory of Spinors, Columbia University Press, New York, 1954

[15] C. Chevalley and R. D. Schafer — The Exceptional Simple Lie Algebras F_4 and E_6, Proc. Nat. Acad. U.S.A. 36, 1950, p. 137-141

[16] M. Demazure et P. Gabriel — Groupes algébriques, tome I, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1970

[17] J. Dieudonné — La géométrie des groupes classiques, Ergebnisse der Math. 5, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 2te Aufl., 1963

[18] G. Harder — Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen, Teil I, Math. Z. 90, 1965, p. 404-428, Teil II, Math. Z. 92, 1966, p. 396-415

[19] G. Harder — Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen, Jahresberichte der D. M. V. 70, 1968, p. 182-216

[20] N. Jacobson — Cayley Numbers and Simple Lie Algebras of Type G_2, Duke Math. Journ. 5, 1939, p. 775-783

[21] M. Kneser — Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, Teil I, Math. Z. 88, 1965, p. 40-47
Teil II, Math. Z. 89, 1965, p. 250-272

[22] M. Kneser — Starke Approximation in algebraischen Gruppen I, Journ. Reine u. Angew. Math. 218, 1965, p. 190-203

[23] S. Lang — Algebra, Addison Wesley, Reading Mass., 1967

[24] S. Lang — Algebraic Groups over Finite Fields, Amer. Journ. Math. 78, 1956, p. 555-563

[25] D. Mumford — Introduction to Algebraic Geometry, (Preliminary version of the first 3 chapters) Harvard Lecture-Notes

[26] I. Satake — Classification-Theory of Semi-Simple Algebraic Groups, Mimeographed Notes, University of Chicago, 1967

[27] J. P. Serre — Cohomologie galoisienne, Springer Lecture Notes in Math. 5, Berlin-Heidelberg-New-York, 1965

[28] J. P. Serre — Corps locaux, Act. Sci. et Ind. 1296, Hermann, Paris, 2ème édition, 1968

[29] J. P. Serre — Groupes algébriques et corps de classes, Act. sci. et ind. 1264, Hermann, Paris, 1959

[30] S. Shatz — Profinite Groups, Arithmetic and Geometry, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1972

[31] R. Steinberg — Regular Elements of Semisimple Algebraic Groups, Publ. Math. I. H. E. S. 25, Bures-sur-Yvette, 1965, p. 49-80

[32] J. Tits — Classification of Algebraic Semisimple Groups, Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966

[33] J. Tits — Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Inventiones Math. 1968, p. 19-41

[34] J. Tits — Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, Proc. Coll. Alg. and Top. Found. of Geom., Utrecht, 1959 (Pergamon Press, Oxford, 1962, p. 175-192)

[35] J. Tits — Some remarks on Galois-Cohomology and representations of semisimple algebraic groups, unveröff. Manuskript, Bonn, 1973

[36] J. Tits Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque. Journ. für Reine u. Angew. Math. 247 , 1971 , p. 196-220

[37] J. Tits Sur la classification des groupes algébriques semi-simples C. R. Acad. Sci. Paris 249 1959 , p. 1438-1440

[38] A. Weil Adeles and Algebraic Groups, Notes by M. Demazure and T. Ono. Inst. Adv. St. Princeton , 1961

[39] A. Weil Algebras with Involution and the Classical Groups, Journ. Indian Math. Soc. 24 , 1960 p. 589-623

[40] A. Weil The Field of Definition of a Variety, Amer. Journ. Math. 78 , 1956 , p. 509-524

[41] P. Slodowy Unitäre Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen über Divisionsalgebren mit Involution , Diplomarbeit , Bonn , 1973

[42] L. Joosten Die Indizes der klassischen Gruppen , Diplomarbeit , Bonn , 1974