

Corrigés de quelques exercices tirés du cours de Michèle Audin

I.10. Soit $z_0 \in U$, et $\varepsilon > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D = D(z_0, \varepsilon)$. Sur D , on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Si $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $f(z) = f(z_0)$ pour tout $z \in D$. Donc si f n'est pas constante au voisinage de z_0 alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$; appelons m le plus petit tel entier. On a

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n-m} = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z) \quad (1)$$

où g est une fonction continue sur D (puisque analytique!) et telle que $g(z_0) = a_m \neq 0$. Par continuité de g en z_0 il existe un voisinage $V \subset D$ de z_0 sur lequel g ne s'annule pas, et alors l'équation (1) montre que

$$z \in V \text{ et } f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow z \in V \text{ et } (z - z_0)^m g(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_0 .$$

I.11. Si $z \in U_u$ alors il existe un petit disque ouvert D centré en z sur lequel f prend constamment la valeur u ; par conséquent tous les points de D appartiennent à U_u (parce que D , qui est ouvert, est un voisinage de chacun de ses éléments). Ceci prouve que U_u est ouvert.

Pour voir que U_u est fermé dans U , prenons une suite (z_n) d'éléments de U_u et supposons qu'elle converge vers $z \in U$. On doit montrer que $z \in U_u$. Déjà, notons que comme f est continue en z on doit avoir

$$f(z) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = u .$$

Si z est égal à l'un des z_n alors $z \in U_u$; sinon, tout voisinage de z contient nécessairement un z_n distinct de z (en fait, une infinité...) et par conséquent f prend au moins deux fois la valeur $f(z)$ sur tout voisinage de z . En utilisant le résultat de l'exercice I.10, on voit que ceci n'est possible que si f est constante sur un voisinage de z , autrement dit $z \in U_u$ et donc U_u est fermé.

Notons que si U est un ouvert connexe, cela signifie que si f est localement constante en un point $z \in U$ alors $U_{f(z)}$ est ouvert-fermé dans U et non vide, autrement dit $U_{f(z)} = U$ et en fait f est constante sur U .

I.17. 1. Supposons que f' soit constamment nulle, et soit $z_0 \in U$. Soit D un petit disque ouvert contenant z_0 , contenu dans U , et sur lequel f soit développable en série entière. Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ son DSE sur D ; on sait que le développement en série entière de f' sur D est alors

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Comme f' est identiquement nulle, on en déduit, en utilisant le théorème d'unicité du développement en série entière, que $n a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, et donc finalement f est localement constante au voisinage de z_0 . Comme ceci est vrai pour tout $z_0 \in U$ et que U est connexe, on en déduit que f est en fait constante sur U (reprendre l'exercice I.11 si cela vous pose problème!).

2. Supposons maintenant qu'en tout point de U on ait $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$. On veut montrer que f est constante; pour nous simplifier un peu la vie ci-dessous, supposons (quitte à remplacer f par $f + C$, ce qui ne change rien au problème) que f prend la valeur 0 sur U .

Alors introduisons la fonction g définie sur U par $g(z) = (f(z))^2$. Cette fonction est analytique sur U , et

on a $g'(z) = 2f(z)f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$. Par conséquent le point 1. de cet exercice nous donne que g est constante, et cette constante est égale à 0 puisque f (donc f^2) prend la valeur 0. Par conséquent on a $(f(z))^2 = 0$ pour tout $z \in U$, et donc $f(z) = 0$ pour tout $z \in U$. On a donc bien montré que f est constante sur U .

I.32. Prouver que f est une détermination du logarithme sur U , c'est justifier que pour tout $z \in U$ on a $e^{f(z)} = z$. Introduisons donc la fonction g définie sur U par $g(z) = \frac{e^{f(z)}}{z}$, qui est bien définie sur U puisque $0 \notin U$, et dérivons-la :

$$g'(z) = \frac{z \cdot f'(z)e^{f(z)} - e^{f(z)}}{z^2} = 0.$$

Comme U est connexe et g est analytique on en déduit que g est constante sur U ; et l'hypothèse selon laquelle il existe $t_0 \in U$ tel que $e^{f(t_0)} = t_0$ nous dit que g prend la valeur 1 en t_0 , par conséquent g prend constamment la valeur 1 sur U . Ceci signifie que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in U$, donc que f est une détermination du logarithme.

I.33. Posons $f(z_0) = w$. Comme $w \neq 0$ il existe un disque D centré en w et ne contenant pas 0; sur ce disque, il existe une détermination f du logarithme et donc aussi une détermination g de la racine m -ième (i.e une fonction analytique g telle que $(g(z))^m = z$ pour tout $z \in U$), obtenue par exemple en posant $g(z) = e^{f(z)/m}$.

Comme f est continue en z_0 , il existe un ouvert V contenant z_0 et tel que $f(V) \subseteq D$; on peut donc introduire la fonction $h = g \circ f$, qui est analytique sur V , et vérifie, pour tout $z \in V$:

$$h(z)^m = (g(f(z)))^m = f(z).$$

Pour répondre à la dernière question, fixons un ouvert V comme ci-dessus et connexe (par exemple, un petit disque centré en z_0). Comme il y a m racines $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de 1, et que si h est la fonction obtenue ci-dessus alors $\lambda_i \cdot h$ est encore une racine m -ième de f pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on voit qu'il y a m fonctions analytiques h_1, \dots, h_m qui sont des racines m -ièmes de f sur V et telles que de plus $h_i(z) \neq h_j(z)$ pour tout z dès que $i \neq j$.

Réciproquement, soit φ une racine m -ième de f sur V . Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ notons $F_i = \{z \in V : \varphi(z) = g_i(z)\}$. Chacun des F_i est fermé dans V (puisque les fonctions φ et g_i sont continues) et les F_i sont disjoints; de plus, comme un nombre complexe non nul a exactement m racines m -ièmes distinctes, V est la réunion des F_i . Ceci impose que chaque F_i est en fait ouvert et fermé dans V , donc par connexité tous les F_i sont vides sauf un, qui est égal à V . Autrement dit, il existe un i tel que $\varphi = h_i$ sur V , et on vient donc de montrer que f admet donc exactement m racines m -ièmes sur V .

II.16. Attention : Dans la première version du corrigé, il y avait une erreur dans la formule pour la différentielle de f , qui se répercutait dans la suite de l'exercice.

Posons $C(z) = \bar{z}$. La fonction C est \mathbb{R} -linéaire mais pas \mathbb{C} -linéaire puisque $C(i) = -i \neq iC(1)$.

Notre fonction g est obtenue en posant $g(z) = C(f(C(z)))$.

Comme g est une composée d'applications continûment différentiables sur U , g est elle-même continûment différentiable. De plus, en utilisant la linéarité de C et la règle de la chaîne, on a pour tout $z \in U$

$$Dg(z) = C \circ Df(C(z)) \circ C.$$

Il y a maintenant plusieurs façons de conclure :

(géométrie) La différentielle de g en tout point est la composée d'une similitude directe et de deux symétries, c'est donc une similitude directe. Autrement dit g est holomorphe en tout point.

(algèbre) Pour vérifier que la différentielle de g en z est \mathbb{C} -linéaire, il faut montrer que $Dg(z)(ix) = iDg(z)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. On calcule :

$$\begin{aligned} Dg(z)(ix) &= C(Df(C(z))(C(ix))) = C(Df(C(z))(-iC(x))) = C(-iDf(C(z))(C(x))) \\ &= iC(Df(C(z))(C(x))) = iDg(z)(x). \end{aligned}$$

(analyse) En calculant les dérivées partielles de g avec la règle de la chaîne, on voit que la matrice jacobienne de g en $z \in U$ est égale à (en notant P la partie réelle de f , et Q sa partie imaginaire)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(\bar{z}) & -\frac{\partial P}{\partial y}(\bar{z}) \\ -\frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{z}) & \frac{\partial Q}{\partial y}(\bar{z}) \end{pmatrix}$$

Comme f est holomorphe elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann, et l'expression obtenue ci-dessus pour la matrice jacobienne de g montre donc que g aussi, donc g est holomorphe.

II.33. Commençons par remarquer que si g est constante alors f est bornée et donc aussi constante, d'après le théorème de Liouville.

Traisons maintenant le cas où g n'est pas constante. Notons Z l'ensemble des zéros de g . On peut définir une fonction h sur $\mathbb{C} \setminus Z$ en posant $h(z) = f(z)/g(z)$. Si $z_0 \in Z$ alors il existe un petit disque D centré en z sur lequel g ne s'annule qu'en z (par le théorème des zéros isolés). Sur D , on a $f(z) = (z - z_0)^n \cdot f_1(z)$ et $g(z) = (z - z_0)^m \cdot g_1(z)$ où n, m sont des entiers et f_1, g_1 des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas en z_0 . Comme f/g est bornée sur $D \setminus \{z_0\}$, on doit avoir $n \geq m$. Finalement, en posant $k = n - m$, on a, sur $D \setminus \{z_0\}$:

$$\frac{f}{g}(z) = (z - z_0)^k \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)}.$$

Ceci montre que h se prolonge par continuité en z_0 , et que la fonction obtenue est holomorphe en z_0 .

Ainsi, h se prolonge à une fonction holomorphe sur \mathbb{C} (toujours notée h) et de plus $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus Z$. Comme Z n'a pas de points d'accumulation, $\mathbb{C} \setminus Z$ est dense dans \mathbb{C} et donc on a en fait $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Mais alors le théorème de Liouville nous permet de conclure que h est constante, autrement dit f et g sont proportionnelles.

Finalement, on voit que deux fonctions holomorphes vérifiant l'hypothèse de l'exercice sont nécessairement proportionnelles.

II.41 Supposons qu'il existe un disque $D(w_0, \varepsilon)$ qui ne rencontre pas $f(\mathbb{C})$, c'est-à-dire

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z) - w_0| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

Introduisons la fonction g définie par $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$. C'est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , qui ne s'annule pas, et on a d'après (2)

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \frac{1}{g(z)} \right| \geq \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

La fonction g est donc une fonction entière bornée; par conséquent g est constante, ce qui entraîne que f est elle-même constante, et cela contredit l'hypothèse sur f .

II.42. Comme f est développable en série entière au voisinage de 0, et que $f(0) = 0$, on voit que la fonction g définie par $g(z) = f(z)/z$ se prolonge par continuité en 0 (en posant $g(0) = f'(0)$) et est aussi développable en série entière au voisinage de 0. Donc g est holomorphe en 0, et on en déduit que g est holomorphe sur D (g est bien sûr holomorphe sur $D \setminus \{0\}$ en tant que quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas).

Fixons $r \in]0, 1[$ et appelons D_r le disque fermé de centre 0 et de rayon r , C_r le cercle de centre 0 et de rayon r . D'après le principe du maximum, $|g|$ atteint son maximum sur D_r en un point z_0 de C_r , et on a donc, pour tout $z \in D_r$:

$$|g(z)| \leq |g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = \frac{|f(z_0)|}{r} < \frac{1}{r}.$$

Soit maintenant $z \in D$; d'après ce qu'on vient de voir, on a $|g(z)| < 1/r$ pour tout $r \in [|z|, 1[$. En faisant tendre r vers 1 on en déduit que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$, ce qui entraîne que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$.

S'il existe z_0 tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors z_0 est un maximum pour $|g|$ sur D , en particulier z_0 est un maximum

local pour $|g|$ et le principe du maximum (et la connexité de D) entraîne alors que g est constante sur D , c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $g(z) = \lambda$ pour tout $z \in D$. Comme de plus $|g(z_0)| = 1$ on voit que $|\lambda| = 1$, et finalement on a bien un complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

II.45. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U de \mathbb{C} . Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) = 0$. On veut montrer que f n'est pas injective; pour cela, considérons le développement en série entière de f au voisinage de z_0

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(Le terme de degré 1 est nul puisqu'il est égal à $f'(z_0)$). Si tous les a_n sont nuls il n'y a rien à montrer, sinon on voit qu'il existe un entier n et une fonction holomorphe g qui ne s'annule pas en z_0 et telle que sur un voisinage V de z_0 on ait

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$$

On sait que $g(z_0) \neq 0$; fixons un disque D centré en $g(z_0)$ et ne contenant pas 0. Quitte à réduire V on peut supposer que $f(V) \subseteq D$, et en utilisant l'existence d'une détermination de la racine n -ième sur D on obtient qu'il existe une fonction holomorphe h telle que $g(z) = (h(z))^n$ sur V (on vient de refaire l'exercice I.33...). Finalement on a, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = f(z_0) + ((z - z_0)h(z))^n .$$

La fonction $z \mapsto (z - z_0)h(z)$ est holomorphe sur V , donc l'image de V est un ouvert contenant 0. Par conséquent $z \mapsto ((z - z_0)h(z))^n$ n'est pas injective (rappelons que $n \geq 2$) et donc f n'est pas injective sur V .

De plus $V = f(U)$ est ouvert puisque U est ouvert et f est holomorphe et non constante. La fonction $f^{-1}: V \rightarrow U$ est bien définie, et continûment différentiable (sur \mathbb{R}) en tant qu'inverse d'une fonction continûment différentiable dont la différentielle est inversible. La règle de la chaîne nous donne que la différentielle de f^{-1} en un point z est égale à l'inverse de la différentielle de f en $f^{-1}(z)$. Comme l'inverse d'une similitude directe est encore une similitude directe, on en déduit que la différentielle de f^{-1} en z est une similitude directe pour tout $z \in V$, et on a fini de prouver que f^{-1} est holomorphe sur V .

III.8 Faisons le calcul en partant de la droite :

$$\int_{\gamma} \overline{g(z)} z^{-2} dz = \int_{t=0}^{2\pi} \overline{g(e^{it})} \cdot e^{-2it} \cdot i e^{it} dt = \int_{t=0}^{2\pi} \overline{g(e^{it})} \cdot i \cdot e^{-it} dt = - \int_{t=0}^{2\pi} \overline{g(e^{it}) \cdot i \cdot e^{it}} dt = - \int_{\gamma} \overline{f(z)} dz .$$

Pour obtenir l'avant-dernière égalité ci-dessus, on a utilisé le fait que si g est une fonction continue de I dans \mathbb{C} , où I est un intervalle réel, alors $\int_I \overline{g(t)} dt = \overline{\int_I g(t) dt}$.

III.10 On a

$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} .$$

Soit γ le cercle de centre 1 et de rayon 1/2, parcouru dans le sens trigonométrique. C'est un chemin fermé contenu dans U , et l'équation ci-dessus nous donne

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi(\text{ind}_{\gamma}(1) - \text{ind}_{\gamma}(0)) = 2i\pi$$

Par conséquent $\frac{1}{z^2 - z}$ ne peut avoir de primitive holomorphe sur U , puisqu'il existe un chemin fermé sur lequel cette fonction n'est pas d'intégrale nulle.

III.16 Considérons le chemin γ correspondant au cercle C parcouru dans le sens trigonométrique, et fixons $x \in \mathbb{C} \setminus C$.

Si x n'est pas dans U , alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-x}$ est holomorphe sur U , et par conséquent

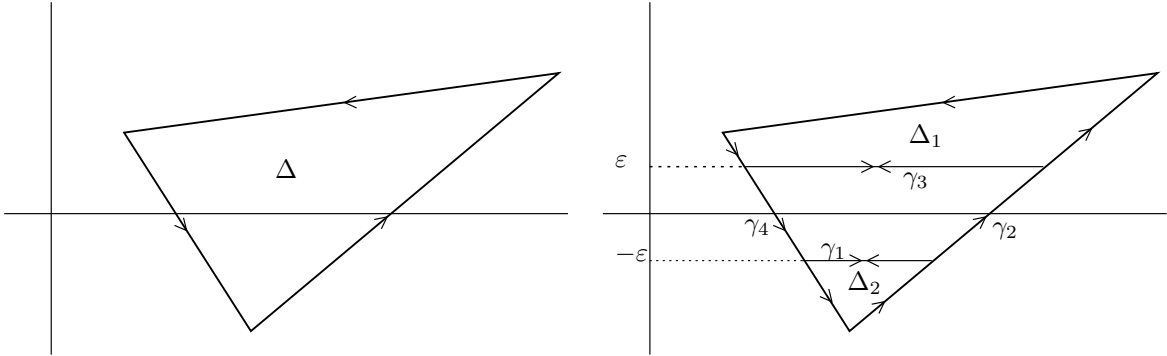
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} = 0 .$$

On en déduit que $\text{ind}_\gamma(x) = 0$, par conséquent x n'appartient pas à D .

On a démontré que si x n'est pas dans U alors il n'est pas dans D ; c'est la même chose que montrer que D est contenu dans U .

III.19. On sait que f est continue, par conséquent pour prouver que f est holomorphe il nous suffit de prouver que pour tout triangle Δ dont l'intérieur est contenu dans U on a $\int_\Delta f(z)dz = 0$.

Soit donc Δ un triangle dont l'intérieur est contenu dans U ; si Δ ne rencontre pas \mathbb{R} alors Δ (et tout son intérieur) est contenu dans U^+ ou U^- , ouvert sur lequel f est holomorphe, ce qui montre que $\int_\Delta f(z)dz = 0$. Finalement on voit qu'il suffit d'étudier le cas correspondant au dessin suivant (à gauche).



Découpons notre triangle Δ comme sur le deuxième dessin ci-dessus (à droite; γ_1 va de gauche à droite, γ_3 de droite à gauche); on a (en reprenant les notations du dessin)

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz + \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

(Sur le dessin : les contributions des chemins qui sont parcourus dans les deux sens s'annulent, tandis que les autres s'ajoutent pour finalement correspondre à l'intégrale de f sur Δ).

Comme f est holomorphe sur U^+ et U^- , les intégrales de f sur Δ_1 , Δ_2 sont nulles (on peut découper Δ_1 en triangles contenus dans U^+ , et l'intégrale de f sur un tel triangle est nulle). Quand on fait tendre ε vers 0, les intégrales sur γ_2 , γ_4 tendent vers 0 (parce que f est continue et que la longueur du chemin tend vers 0) alors que $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ tend vers $\int_I f(t)dt$ et $\int_{\gamma_3} f(z)dz$ tend vers $-\int_I f(t)dt$ (cela se vérifie facilement en écrivant l'intégrale, et en utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre; attention au sens de parcours!).

Finalement on voit en faisant tendre ε vers 0 que $\int_\Delta f(z)dz = 0$; ceci étant vrai pour tout triangle Δ , le théorème de Morera permet de conclure que f est holomorphe sur U .

La fonction F définie dans la deuxième question de l'énoncé est clairement holomorphe sur U^+ . Sur U^- , F est continûment différentiable (comme fonction de deux variables réelles) et sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire (appliquez la règle de la chaîne, et comparez avec l'exercice II.16), par conséquent F est également holomorphe sur U^- .

Si $U \cap \mathbb{R} = \emptyset$ alors on a fini. Sinon, il nous reste à étudier ce qui se passe sur $U \cap \mathbb{R}$ et, d'après le résultat établi au début de l'exercice, on a simplement à montrer que f est continue sur $U \cap \mathbb{R}$. Soit donc $t \in U \cap \mathbb{R}$; fixons une suite z_n d'éléments de U qui converge vers t . Quitte à extraire, on voit qu'on doit prendre en considération deux familles de suites : celles qui convergent vers t en gardant des parties imaginaires positives ou nulles, et celles qui convergent vers t avec partie imaginaire strictement négative.

Dans le premier cas, on a $F(z_n) = f(z_n)$ et donc $\lim F(z_n) = f(t)$ puisque f est continue. Dans le deuxième cas, on a $F(z_n) = \overline{f(\overline{z_n})}$. Puisque t est réel, $\overline{z_n}$ tend vers t ; comme f est continue, $f(\overline{z_n})$ tend donc vers $f(t)$. Par conséquent $F(z_n)$ tend vers $\overline{f(t)}$, qui est égal à $f(t)$ puisque $t \in U \cap \mathbb{R}$ et f prend des valeurs réelles sur $U \cap \mathbb{R}$.

III.24. Pour se simplifier la vie on va tout d'abord supposer que γ_0, γ_1 sont tous les deux de classe \mathcal{C}^2 . Alors on peut définir une fonction $\Gamma: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ en posant

$$\Gamma(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t).$$

Montrons que cette fonction est à valeurs dans $U = \mathbb{C} \setminus \{z\}$ (faites un dessin!) : la condition sur γ_0, γ_1 signifie que pour tout t $\gamma_1(t)$ est à l'intérieur du disque ouvert de centre $\gamma_0(t)$ et de rayon $|z - \gamma_0(t)|$. Comme ce disque est convexe et que $\Gamma(s, t)$ est une combinaison convexe de $\gamma_0(t)$ et $\gamma_1(t)$ on voit que $\Gamma(s, t)$ appartient aussi à ce disque, par conséquent $\Gamma(s, t) \neq z$.

De plus, Γ est de classe \mathcal{C}^2 , tous les $\Gamma(s, \cdot)$ sont des lacets et on a $\Gamma(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$, $\Gamma(1, \cdot) = \gamma_1(\cdot)$. Par conséquent le Corollaire III.2.3 donne le résultat.

Si maintenant γ_0, γ_1 ne sont pas de classe \mathcal{C}^2 alors il faut se convaincre que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver des chemins $\tilde{\gamma}_i$ ($i = 0, 1$) de classe \mathcal{C}^2 et tels que $|\gamma_i(t) - \tilde{\gamma}_i(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$ puis vérifier que pour $\varepsilon > 0$ assez petit $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ vérifient les conditions de l'exercice, et enfin conclure en faisant tendre ε vers 0.

IV.7. ATTENTION : L'énoncé de cet exercice est un peu flou. Par exemple, en tout point où f est holomorphe f a un développement en série de Laurent au voisinage de ce point (qui dans ce cas est en fait un développement en série entière!) et donc f a au moins un développement en série de Laurent différent pour chaque point (en fait, plusieurs). Il risque donc d'être un peu long de les calculer tous! Dans cette correction, j'ai donc interprété la question comme correspondant aux développements en séries de Laurent centrées en 0.

Comme la fonction f a trois pôles simples : 1, -1 et 3, il y a trois développements correspondant aux couronnes centrées en 0 : un qui converge sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, un qui converge sur $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ et un qui converge sur $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z|\}$. Attention, il y a aussi par exemple des développements en série de Laurent correspondant aux couronnes centrées en 3 et en -1, et c'est un bon exercice de les calculer. Il y a encore d'autres développements : par exemple, si $a \in \mathbb{C}$ est tel que $|a - 1|$, $|a + 1|$ et $|a - 3|$ sont deux à deux distincts, alors il y a quatre développements en série de Laurent pour les couronnes centrées en a , qui correspondent à : un disque centré en a ne contenant aucun des pôles, une couronne centrée en a avec un pôle dans le disque intérieur et deux pôles dans le disque extérieur, une couronne avec deux pôles dans le disque intérieur et un à l'extérieur, et enfin une couronne avec les trois pôles dans le disque intérieur. C'est pourquoi il serait un peu long d'essayer de trouver une formule pour tous les développements de f en série de Laurent.

Calculons maintenant les développements de f sur les couronnes centrées en 0 (il faut connaître les DSE classiques!) : sur D , on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z/3} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ avec}$$

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3^{n+1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3^{n+1}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Sur D_2 , on a

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{-1}{1 - 1/z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z/3} = \frac{-1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Au final, le développement $\sum a_n z^n$ en série de Laurent de f sur D_2 est donné par

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair et } n < 0 \\ \frac{1}{3^{n+1}} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour calculer le développement de f sur D_3 , on écrit cette fois

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{-1}{1 - 1/z^2} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 3/z}$$

Et cette fois on arrive à

$$a_n = \begin{cases} -1 - 3^{-1-n} & \text{si } n \text{ est pair et } n < 0 \\ -3^{-1-n} & \text{si } n \text{ est impair et } n < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

IV.13. Soit f une fonction comme dans l'énoncé. On voit que $z.f(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0, par conséquent f a une singularité effaçable en 0 et f est en fait holomorphe sur \mathbb{C} .

Introduisons maintenant $g(z) = f(1/z)$; g vérifie la même inégalité que f , donc g a aussi une singularité effaçable en 0. Ceci prouve que f est holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$; en particulier elle est continue sur $\hat{\mathbb{C}}$ qui est compact, donc f est bornée sur $\hat{\mathbb{C}}$ et finalement f est une fonction entière bornée, dont le théorème de Liouville nous permet d'affirmer qu'elle est constante.

IV.14. Pour simplifier les notations, notons $g(z) = \exp(1/|z|)$. Une fonction f susceptible de remplir la condition de l'énoncé est nécessairement non constante; de plus, si f est solution on voit que

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty .$$

Par conséquent f a un pôle en 0, donc il existe un entier $n \geq 1$ tel que $z^n f(z)$ soit bornée au voisinage de 0. Mais alors on voit que $|g(z)/f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers 0, et finalement il n'existe pas de fonction satisfaisant la condition de l'énoncé.

IV.17. Dire que f est analytique en l'infini, c'est dire que la fonction définie par $g(z) = f(1/z)$ est analytique en 0. Notons que pour tout $z \neq 0$ on a

$$f'(z) = -\frac{g'(1/z)}{z^2}, \text{ soit encore}$$

$$z^2 f'(z) = -g'(1/z)$$

Quand z tend vers l'infini, $1/z$ tend vers 0 et par conséquent $g'(1/z)$ tend vers $g'(0)$. On voit donc que $z^2 f'(z)$ a une limite égale à $-g'(0)$ quand z tend vers l'infini, ce qui impose que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 0$$

IV.32. Soit V un voisinage de z_0 . On sait que $f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans \mathbb{C} ; de plus comme g est entière et non constante on sait que $g(\mathbb{C})$ est dense dans \mathbb{C} .

En général, si X, Y sont des espaces topologiques, A est dense dans X et $f: X \rightarrow Y$ est une application continue, il est toujours vrai que $f(A)$ est dense dans $f(X)$ (l'image réciproque par f d'un ouvert non vide de $f(X)$ ne rencontrant pas A serait un ouvert non vide de X ne rencontrant pas A). Par conséquent, $g(f(V \setminus \{z_0\}))$ est dense dans $g(\mathbb{C})$, qui est lui-même dense dans \mathbb{C} . On en déduit que $g \circ f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans \mathbb{C} . Ceci étant vrai pour tout voisinage V de z_0 , on voit que f a une singularité essentielle en z_0 .

V.2. Il faut commencer par factoriser f pour pouvoir voir l'ordre de chaque pôle. On a

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

On voit donc, puisque $z \mapsto e^{iz}$ ne s'annule pas sur \mathbb{C} , que 0 est un pôle simple de f tandis que i et $-i$ sont tous deux des pôles doubles. Pour calculer le résidu en i , une technique possible est d'introduire $h(z) = (z-i)^2 f(z)$ puis de calculer $h'(i)$. Allons-y :

$$h(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} \text{ donc } h'(z) = \frac{ie^{iz}z(z+i)^2 - [(z+i)^2 + 2z(z+i)]e^{iz}}{z^2(z+i)^4}$$

On en déduit (en utilisant $i^4 = 1$ et $i^2 = -1$) :

$$\text{rés}(f; i) = \frac{4i^4 e^{-1} - 8i^2 e^{-1}}{i^2 \cdot 16i^4} = -\frac{3}{4e} .$$

V.3 On a $1 + z^n = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines n -ièmes de -1 ($\lambda_i = e^{ik\pi/n}$). Comme g ne s'annule en aucun des λ_i , on voit que f a un pôle simple en chacun des λ_i , et il nous reste à calculer

le résidu correspondant.

Comme le pôle est simple, le résidu de f en λ_i est simplement la limite quand z tend vers λ_i de $(z - \lambda_i)f(z)$. De plus, comme $z^n + 1 = z^n - \lambda_i^n = (z - \lambda_i)(z^{n-1} + \lambda_i z^{n-2} + \dots + \lambda_i^{n-1})$, on voit que

$$\lim_{z \rightarrow \lambda_i} \frac{z^n + 1}{z - \lambda_i} = n\lambda_i^{n-1} = -\frac{n}{\lambda_i}$$

(La dernière égalité vient du fait que $\lambda_i^n = -1$). Comme g est continue, la limite quand z tend vers λ_i de $g(z)$ est égale à $g(\lambda_i)$, et finalement on voit que le résidu de f en λ_i est égal à $\frac{-\lambda_i g(\lambda_i)}{n}$.

V.7. Posons $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ et $g(z) = -4z^5$. On a $f(z) - g(z) = z^8 + z^2 - 1$, et on en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire, que sur le cercle unité on a $|f(z) - g(z)| \leq 3$ tandis que $|g(z)| = 4$. On peut donc appliquer le théorème de Rouché pour conclure que f a le même nombre de zéros que g à l'intérieur du disque unité (comptés avec multiplicité), c'est-à-dire 5.

V.9. Commençons par remarquer que $1 - 2u \cos(\theta) + u^2 = (1 - ue^{i\theta})(1 - ue^{-i\theta})$. On a donc envie de ramener l'intégrale que l'on nous demande de calculer à une intégrale sur le cercle unité. Il faut faire attention au fait que quand on écrit l'intégrale d'une fonction holomorphe sur le cercle comme une intégrale réelle, un facteur $ie^{i\theta}$ apparaît (à cause du $\gamma'(\theta)$ dans la formule...). Ceci pris en compte, on introduit la fonction $g(z) = \frac{1}{z(1-uz)(1-u/z)}$ et on voit que ($\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) :

$$\int_{\gamma} g(z) dz = i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2u \cos(\theta) + u^2}$$

Notons qu'on a $g(z) = \frac{1}{(1-uz)(z-u)}$; g est une fonction méromorphe qui a deux pôles simples, l'un en u et l'autre en $1/u$. Calculons les résidus de g en ces pôles :

$$\text{rés}(g, u) = \lim_{z \rightarrow u} (z - u)g(z) = \frac{1}{1 - u^2} ;$$

$$\text{rés}(g, 1/u) = \lim_{z \rightarrow 1/u} (z - 1/u)g(z) = \frac{1}{u^2 - 1} .$$

On peut appliquer le théorème des résidus à la fonction g qui est méromorphe sur \mathbb{C} (qui est bien sûr simplement connexe) et au chemin γ , qui ne passe par aucun pôle de g , pour obtenir que

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2i\pi(\text{rés}(g, u)\text{ind}_{\gamma}(u) + \text{rés}(g, 1/u)\text{ind}_{\gamma}(1/u)) .$$

Un seul des deux pôles est à l'intérieur du disque unité, et l'on obtient deux résultats, selon que $|u| < 1$ ou $|u| > 1$:

si $|u| < 1$: Alors u est d'indice 1 par rapport à γ tandis que $1/u$ est d'indice 0, par conséquent on a $\int_{\gamma} g(z) dz = \frac{2i\pi}{1-u^2}$, ce qui nous donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2u \cos(\theta) + u^2} = \frac{2\pi}{1 - u^2} .$$

si $|u| > 1$: Cette fois u est d'indice 0, $1/u$ est d'indice 1, et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2u \cos(\theta) + u^2} = \frac{2\pi}{u^2 - 1}$$

V.12. Cette fois-ci, notre fonction (appelons-la f) a un pôle double en ξa . Pour calculer le résidu de f en ξa , on introduit $h(z) = (z - \xi a)^2 f(z)$ et on calcule $h'(\xi a)$. En utilisant le fait que $z^4 + a^4 = z^4 - \xi^4 a^4$, la formule de factorisation habituelle nous donne

$$h(z) = \frac{1}{(z^3 + z^2 \xi a + z \xi^2 a^2 + \xi^3 a^3)^2} \text{ donc } h'(z) = -2 \frac{3z^2 + 2\xi a z + \xi^2 a^2}{(z^3 + z^2 \xi a + z \xi^2 a^2 + \xi^3 a^3)^3}$$

On obtient finalement

$$\text{rés}(f, \xi a) = h'(\xi a) = \frac{-12\xi^2 a^2}{64\xi^9 a^9} = \frac{-3}{16\xi^7 a^7} = \frac{-3\xi}{16a^7}.$$

(La dernière égalité vient du fait que $\xi^8 = 1$)

(2) D'après la proposition 5.22, l'intégrale que l'on cherche à calculer est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de f en ses pôles contenus dans le demi-plan supérieur, et ceux-ci sont (puisque $a > 0$) $ae^{i\pi/4}$ et $ae^{3i\pi/4}$. On obtient finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2} = 2i\pi \cdot \frac{-3}{16a^7} (e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4}) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a^7}.$$